Corrigé – TD 14

Convergence de variables aléatoires

Exercice 0 (Formule de compensation)**.** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi μ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

1. On suppose que μ est la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0,\infty[$. On pose
$$P = \sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{et} \quad F = N - P = \sum_{i=1}^{N}(1 - X_i),$$
avec $P = F = 0$ sur $\{N = 0\}$. Les variables aléatoires P et F représentent respectivement le nombre de piles et de faces dans un jeu de pile ou face de paramètre p à N lancers.
   (a) Déterminer la loi du couple (P, N).
   (b) En déduire les lois de P et F, et montrer que P et F sont indépendantes.
2. On ne fait plus d'hypothèse sur les lois. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que
$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} f(X_i)\right] = \mathbb{E}[N] \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mu(dx),$$
avec $\sum_{i=1}^{N} f(X_i) = 0$ sur $\{N = 0\}$.

Corrigé :

1. (a) On a $\mathbb{P}(P = 0, N = 0) = \mathbb{P}(N = 0) = e^{-\lambda}$, et pour $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(P = k, N = n) &= \mathbb{P}\left(N = n, \sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \\
&= \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}.
\end{aligned}$$
(b) On a pour $k, l \geq 0$,
$$\mathbb{P}(P = k, F = l) = \mathbb{P}(P = k, N = k + l) = \left(e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\right)\left(e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^l}{l!}\right).$$
Donc les variables aléatoires P et F sont indépendantes et de lois respectives les lois de Poisson de paramètres λp et $\lambda(1-p)$.

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

2. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} f(X_i)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{N=n\}} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)\right] \\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{N=n\}} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)\right] \\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} f(X_i)\right] \\
&= \sum_{n\geq 1} n\,\mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}[f(X_1)] \\
&= \mathbb{E}[N]\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx).
\end{aligned}$$

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et de même loi.

1. Montrer que p.s. $\sum_{n=0}^{\infty} X_n = \infty$, sauf dans un cas à préciser.
2. Soit X une v.a. positive. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a l'équivalence suivante :

$$\mathbb{E}[X] < \infty \iff \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) < \infty.$$

   INDICATION. On pourra montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \alpha n \mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)) \leq \mathbb{E}[X] \leq \sum_{n\geq 0} \alpha(n+1)\mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)).$$

3. En déduire la dichotomie suivante : p.s.

$$\limsup \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{cases}.$$

4. (LFGN cas non intégrable) Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Prouver que si Y_1 n'est pas intégrable alors la suite $(n^{-1}S_n)_{n\geq 1}$ diverge p.s.

Corrigé :

1. Tout d'abord, si X_1 est presque sûrement nulle, alors $\sum_n X_n = 0$ p.s. Supposons que X_1 n'est pas nulle, alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(X_1 > \varepsilon) > 0$. On a trivialement que $\sum_n \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = \infty$, et les X_n sont indépendants, donc par Borel-Cantelli, p.s. les X_n sont supérieurs à ε une infinité de fois, donc $\sum_n X_n = \infty$.

2. Commençons par les encadrements de X suivants

$$\sum_{n\geq 0} \alpha n \mathbf{1}_{\{\alpha n \leq X < \alpha(n+1)\}} \leq X \leq \sum_{n\geq 0} \alpha(n+1)\mathbf{1}_{\{\alpha n \leq X < \alpha(n+1)\}}.$$

En prenant l'espérance de la ligne précédente on obtient l'inégalité mentionnée dans l'indication. Notons ensuite que

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)\mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \geq \alpha n).$$

On a donc

$$\alpha \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) - \alpha \leq \mathbb{E}[X] \leq \alpha \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \geq \alpha n),$$

dont il est facile de déduire que

$$\mathbb{E}[X] < \infty \iff \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) < \infty.$$

3. Soit $\alpha > 0$. Pour tout $0 < \varepsilon < \alpha$, on a

$$\limsup\{X_n \geq \alpha n\} \subset \left\{\limsup \frac{X_n}{n} \geq \alpha\right\} \subset \limsup\{X_n \geq (\alpha - \varepsilon)n\}.$$

D'après la question précédente, pour tout $\alpha > 0$,

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_1 \geq \alpha n) \left\{ \begin{array}{ll} < \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ = \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{array} \right. ,$$

donc par Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\left(\limsup \frac{X_n}{n} \geq \alpha\right) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ 1 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{array} \right.$$

et par conséquent p.s.

$$\limsup \frac{X_n}{n} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{array} \right.$$

4. On remarque que

$$\left\{\frac{S_n}{n} \to \text{ une limite réelle}\right\} \subset \left\{\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} \to 0\right\} \cap \left\{\frac{S_n}{n(n+1)} \to 0\right\}.$$

Donc

$$\left\{\frac{S_n}{n} \to \text{ une limite réelle}\right\} \subset \left\{\frac{|Y_n|}{n} \to 0\right\},$$

et on conclut en utilisant la question précédente.

Exercice 2. Montrer que si les variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 0}$ sont indépendantes, la série $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge ou diverge presque sûrement.

Corrigé : Notons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité sur lequel les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ sont définies. Notons $\mathcal{F}_N = \sigma(X_N, X_{N+1}, \ldots)$. La série $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq N} X_n$ converge pour tout $N \geq 0$. Or

$$\left\{\omega \in \Omega;\ \sum_{n\geq N} X_n(\omega) \text{ converge}\right\} \in \mathcal{F}_N. \tag{1}$$

On a donc

$$\left\{\omega \in \Omega;\ \sum_{n\geq 0} X_n(\omega) \text{ converge}\right\} = \bigcap_{N\geq 0} \left\{\omega \in \Omega;\ \sum_{n\geq N} X_n(\omega) \text{ converge}\right\} \in \bigcap_{N\geq 0} \mathcal{F}_N.$$

On conclut en utilisant la loi du 0–1 de Kolmogorov.

Remarque. Dans un but pédagogique, expliquons d'où vient (1) en détail. D'après le critère de Cauchy,

$$\left\{\omega \in \Omega;\ \sum_{n\geq N} X_n(\omega) \text{ converge}\right\} = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{m\geq N} \bigcap_{p,q\geq m} \left\{\omega \in \Omega;\ \left|\sum_{n=p}^{q} X_n(\omega)\right| < \frac{1}{k}\right\}.$$

Or, pour $p, q \geq N$,

$$\left\{\omega \in \Omega;\ \left|\sum_{n=p}^{q} X_n(\omega)\right| < \frac{1}{k}\right\} \in \sigma(X_p, X_{p+1}, \ldots, X_q) \subset \mathcal{F}_N,$$

ce qui établit (1) car $\mathcal{F}_N$ est une tribu.

Exercice 3. Quels sont les liens entre ces différentes convergences de variables aléatoires : en loi, presque sûre, en probabilité, $\mathbb{L}^1$, $\mathbb{L}^p$ pour $p > 1$?

Corrigé :

- Convergence p.s. implique convergence en probabilité qui implique convergence en loi.
- Convergence $\mathbb{L}^p$ pour $p \geq 1$ implique convergence en probabilité.
- Convergence $\mathbb{L}^q$ implique convergence $\mathbb{L}^p$ pour $q > p$.
- Vers une constante, convergence en loi et convergence en probabilité sont équivalentes.

Il est très fortement recommandé de trouver des contre-exemples pour les réciproques qui ne sont pas vraies en général. On a cependant les réciproques "partielles" suivantes :

- Convergence en probabilité implique la possibilité d'extraire une sous-suite qui converge p.s.

- En redéfinissant les variables aléatoires sur un même espace de probabilité, il est possible de transformer convergence en loi vers converge p.s., c'est le théorème de représentation de Skorokhod [1].

- Convergence en probabilité avec uniforme intégrabilité implique convergence $\mathbb{L}^1$.

Exercice 4. Vrai ou faux?

1. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_n \to X$ en loi. Montrer que $f(X_n) \to f(X)$ en loi pour toute fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Soit $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite de mesures de probabilité et μ une mesure positive. Alors il y a convergence étroite des μ_n vers μ si et seulement si, pour toute fonction f continue à support compact, on a la convergence $\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu$.

3. Si la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X, alors $\mathbb{E}[X_n] \longrightarrow \mathbb{E}[X]$.

Corrigé :

1. Vrai: si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue bornée, alors $g \circ f$ est continue bornée et donc $\mathbb{E}\left[g(f(X_n))\right] \to \mathbb{E}\left[g(f(X))\right]$.

2. L'implication est vraie, mais la réciproque est fausse (prendre $\mu_n = \delta_n$). En effet, par un résultat du cours, $(\mu_n)_{n\geq 0}$ converge étroitement vers μ si et seulement si μ est une mesure de probabilité et pour toute fonction f continue à support compact, on a la convergence $\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu$.

3. Faux: on prend $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), dx)$ et $X_n(t)$ la fonction tente telle que $X_n(0) = 0, X_n(1/n) = n, X_n(2/n) = 0$. Alors X_n converge p.s. vers 0 mais $\mathbb{E}\left[X_n\right] = 1 \neq \mathbb{E}\left[0\right]$.

   Un autre exemple davantage probabiliste: soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On note $Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et soit $T = \inf\{n \geq 1; Z_n = 1\}$. On pose finalement:

$$W_n = Z_{\min(n,T)}.$$

   Ainsi, (W_n) est la marche aléatoire issue de 0 qui fait des sauts ± 1 qui reste en 1 une fois qu'elle l'a atteint. Il est possible de vérifier que $T < \infty$ p.s. de sorte que (W_n) converge presque sûrement vers 1. Or il est facile de vérifier que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}\left[W_n\right] = 0$, de sorte que $\mathbb{E}\left[W_n\right]$ ne converge pas vers $\mathbb{E}\left[1\right]$. Avec le langage du processus stochastique, cela fournit l'exemple d'une martingale qui converge p.s. mais pas dans $\mathbb{L}^1$.

Exercice 5. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles, et X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telles que $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi.

1. On suppose que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

[1] **Attention:** c'est un résultat très subtil, qui ne garde pas les dépendences de construction des variables aléatoires, ni les corrélations (en particulier pas l'indépendance !).

2. Est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?

3. (*Lemme de Slutsky*) On suppose que Y est constante p.s. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

Corrigé :

1. D'après le théorème de Lévy, il suffit de montrer que $\Phi_{(X_n,Y_n)}(t,t') \to \Phi_{(X,Y)}(t,t')$ pour tout $(t,t') \in \mathbb{R}^2$. Et l'on a par indépendance,
$$\Phi_{(X_n,Y_n)}(t,t') = \Phi_{X_n}(t)\Phi_{Y_n}(t') \to \Phi_X(t)\Phi_Y(t') = \Phi_{(X,Y)}(t,t').$$

2. Il n'est pas vrai en général que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi. En effet, considérons les variables aléatoires $X_n = Z = Y_n$ pour tout $n \geq 1$, avec Z gaussienne centrée. La variable Z étant symétrique, on a $X_n \to -Z$ en loi. Si $(X_n, Y_n) \to (-Z, Z)$ en loi, alors $X_n + Y_n \to -Z + Z$ en loi (car la fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est continue), c'est à dire $2Z = 0$ en loi, ce qui n'est pas.

3. Il suffit de montrer que $\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) \to \mathbb{E}(F(X, Y))$ pour une fonction F continue à support compact. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $Y = a$ p.s. On a alors $Y_n \to a$ en probabilité (résultat important à savoir prouver). Et
$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X, a))| \\ \leq \; & |\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n, a))| + |\mathbb{E}(F(X_n, a)) - \mathbb{E}(F(X, a))|. \end{aligned}$$
La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x, a)$ est continue et bornée donc $|\mathbb{E}(F(X_n, a)) - \mathbb{E}(F(X, a))| \to 0$. De plus, la fonction F est uniformément continue. Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver δ tel que $|F(x, y) - F(x', y')| \leq \varepsilon$ pour $|x - x'| + |y - y'| \leq \delta$. Alors, en notant M un majorant de F, on a
$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n, a))| \\ \leq \; & \mathbb{E}(|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)|) \\ \leq \; & \mathbb{E}(|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)|\mathbf{1}_{\{|Y_n - a| \geq \delta\}}) + \mathbb{E}(|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)|\mathbf{1}_{\{|Y_n - a| < \delta\}}) \\ \leq \; & 2M\mathbb{P}(|Y_n - a| \geq \delta) + \varepsilon. \end{aligned}$$
Ainsi, $\limsup |\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n, a))| \leq \varepsilon$ et ceci étant vrai pour tout ε, on en déduit que $|\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n, a))| \to 0$, puis le résultat.

Exercice 6 (Sans calcul)**.** Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n$ pour f une fonction continue sur $[0, 1]$;

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour f une fonction continue sur $[0, 1]$ et $p \in [0, 1]$;

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$.

Corrigé :

1. On a
$$\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\, dx_1\ldots dx_n = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{U_1+\cdots+U_n}{n}\right)\right]$$
où $U_1,\ldots,U_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0,1]$. D'après la loi forte des grands nombres, $n^{-1}(U_1+\cdots+U_n)$ converge p.s. et donc en loi vers $1/2$. Ainsi,
$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n} dx_1,\ldots dx_n\, f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

2. On a
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{B_1+\cdots+B_n}{n}\right)\right],$$
où $B_1,\ldots,B_n$ sont des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p indépendantes. D'après la loi forte des grands nombres, $n^{-1}(B_1+\ldots+B_n)$ converge p.s. et donc en loi vers p. Ainsi,
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right) = f(p).$$

3. On a
$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda n}\frac{(\lambda n)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{P_1+\cdots+P_n}{n}\right)\right],$$
où $P_1,\ldots,P_n$ sont des variables aléatoires de Poisson de paramètre λ indépendantes. D'après la loi forte des grands nombres, $n^{-1}(P_1+\cdots+P_n)$ converge p.s. et donc en loi vers λ. Ainsi,
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda n}\frac{(\lambda n)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\lambda).$$

Remarque : on a utilisé les résultats suivants :

1. La somme de n variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p\in[0,1]$ *indépendantes* suit une loi binomiale de paramètres n et p.

2. La moyenne d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$ est λ.

3. Soient $n\geq 1$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n>0$ et $X_1,\cdots,X_n$ n variables aléatoires *indépendantes*, chaque X_i suivant une loi de Poisson de paramètre λ_i. Alors $X_1+\ldots+X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\ldots+\lambda_n$.

Exercice 7 (Théorème de Bernstein–Weierstrass). Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Le n-ième polynôme de Bernstein de f est
$$B_n(x)\colon x\mapsto\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Soit $S_n(x) := \frac{\mathrm{Bin}(n,x)}{n}$ où $\mathrm{Bin}(n,x)$ est une v.a. de loi binomiale de paramètre n et x. Montrer que $B_n(x) = \mathbb{E}[f(S_n(x))]$.
2. En déduire le Théorème de Berstein–Weierstrass
$$\|B_n - f\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Corrigé :

1. C'est évident.
2. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\eta > 0$ le module d'uniforme continuité de f associé à ε. Alors on a
$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &\leq \mathbb{E}[|f(x) - f(S_n(x))|] \\ &\leq \mathbb{E}[|f(x) - f(S_n(x))|\mathbf{1}_{|S_n(x)-x|\leq\eta}] + \mathbb{E}[|f(x) - f(S_n(x))|\mathbf{1}_{|S_n(x)-x|\geq\eta}] \\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}[|S_n(x) - x| \geq \eta] \end{aligned}$$
Pour évaluer $\mathbb{P}[|S_n(x) - x| \geq \eta]$, on utilise l'inégalité de Markov :
$$\mathbb{P}[|S_n(x) - x| \geq \eta] \leq \frac{\mathrm{Var}[S_n(x)]}{\eta^2} = \frac{x(1-x)}{n\eta^2} \leq \frac{1}{2n\eta^2}.$$
La majoration ci-dessus est uniforme en x, ce qui permet de conclure.

Exercice 8 (Loi faible, non forte). Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi
$$\mathbb{P}_{X_n} = \frac{1}{2n\ln(n+1)}(\delta_n + \delta_{-n}) + \left(1 - \frac{1}{n\ln(n+1)}\right)\delta_0.$$

1. Montrer que $Y_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que presque sûrement, Y_n ne converge pas.

Corrigé :

1. Montrer (en calculant) que
$$\mathbb{E}\big[(Y_n)^2\big] \longrightarrow 0.$$
L'inégalité de Markov permet alors de conclure.
2. À l'aide du lemme de Borel, on montre que $\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \geq 1 \text{ pour une infinité de } n\right) = 1$, et on conclut comme dans l'exercice 1 question 4.

Exercice 9. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indépendantes et de même loi μ. On pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. On suppose que μ est la loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la suite $(n(1 - M_n))_{n\geq1}$ converge en loi quand $n \to \infty$ et expliciter la loi limite.
2. On suppose que μ est la loi de Cauchy standard, c'est-à-dire que $\mu(dx) = (\pi(1+x^2))^{-1}dx$. Montrer que la suite $(n/M_n)_{n\geq1}$ converge en loi et expliciter la loi limite.
Rappel : $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quand $x \to +\infty$.

Corrigé :

1. Pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $n(1-M_n)$ est à valeurs dans $[0,n]$. On a donc, pour tout $t<0$, $\mathbb{P}(n(1-M_n)\leq t)=0$. Soit $t\geq 0$ fixé. Pour tout $n\geq t$, on a

$$\mathbb{P}(n(1-M_n)\leq t)=\mathbb{P}\left(M_n\geq 1-\frac{t}{n}\right)=1-\mathbb{P}\left(M_n<1-\frac{t}{n}\right)=1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

Donc $\mathbb{P}(n(1-M_n)\leq t)\to(1-e^{-t})\mathbf{1}_{\{t\geq 0\}}$, et la fonction $t\mapsto(1-e^{-t})\mathbf{1}_{\{t\geq 0\}}$ est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, la suite $(n(1-M_n))_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

2. Soit $t\leq 0$. On a

$$\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n}\leq t\right)\leq\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n}\leq 0\right)=\mathbb{P}(M_n\leq 0)=\frac{1}{2^n},$$

donc $\mathbb{P}\left(nM_n^{-1}\leq t\right)\to 0$ quand $n\to\infty$. Soit maintenant $t>0$. On a

$$\mathbb{P}(nM_n^{-1}\leq t)=\mathbb{P}(nM_n^{-1}\leq t,M_n>0)+\mathbb{P}(nM_n^{-1}\leq t,M_n\leq 0).$$

D'après ce qui a été fait précédemment, $\mathbb{P}(nM_n^{-1}\leq t,M_n\leq 0)\to 0$. Et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n}\leq t,M_n>0\right) &= \mathbb{P}\left(M_n\geq\frac{n}{t}\right)\\ &= 1-\left(\int_{-\infty}^{\frac{t}{n}}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}\right)^n\\ &= 1-\frac{1}{\pi^n}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{n}{t}\right)\right)^n\\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1-\exp\left(-\frac{t}{\pi}\right),\end{aligned}$$

car $\arctan(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$ quand $x\to\infty$. Ainsi, la suite $(nM_n^{-1})_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\frac{1}{\pi}$.

Exercice 10. Soit $(X_n,n\geq 1)$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que $\limsup_{n\to\infty}X_n/\ln(n)=1$ p.s.

2. On pose $Z_n=\max(X_1,...,X_n)/\ln(n)$, montrer que $\liminf_{n\to\infty}Z_n\geq 1$ p.s.

3. Montrer que pour une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ bien choisie, $\limsup_{k\to\infty}Z_{n_k}\leq 1$ p.s. En déduire que $\lim_{n\to\infty}Z_n=1$ p.s.

Corrigé :

1. Soit $a\geq 0$, alors pour tout $\varepsilon>0$ l'évènement $\{\limsup X_n/\ln(n)>a\}$ est imbriqué entre deux limsup d'évènements :

$$\limsup_{n\to\infty}\{X_n\geq(a-\varepsilon)\ln(n)\}\subset\{\limsup_{n\to\infty}X_n/\ln(n)>a\}\subset\limsup_{n\to\infty}\{X_n>a\ln(n)\}.$$

$$\mathbb{P}[X_n \geq a\ln(n)] = \frac{1}{n^a},$$

et les évènements sont indépendants, donc d'après Borel-Cantelli en prenant des ε apropriés

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} > a\right] = \begin{cases} 1 & \text{si } a < 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \end{cases},$$

donc $\limsup \frac{X_n}{\ln(n)} = 1$ p.s.

2. Soit $\epsilon \in (0,1)$ et posons $A_n = \{Z_n \leq 1-\epsilon\}$. Montons que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(X_i \leq (1-\epsilon)\ln(n) \text{ pour } 1 \leq i \leq n) = \mathbb{P}(X_1 \leq (1-\epsilon)\ln(n))^n = \left(1 - e^{-(1-\epsilon)\ln(n)}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right) \leq \exp\left(-n\cdot\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right) \leq \exp\left(-n^{\epsilon}\right). \end{aligned}$$

Donc $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., pour tout n suffisamment grand on a $Z_n \geq 1-\epsilon$, ce qui conclut.

3. Posons $B_n = \{Z_n \geq 1+\epsilon\}$. Un calcul proche de celui de la question précédente donne:

$$\mathbb{P}(B_n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right)^n \quad \underset{n\to\infty}{\sim} \quad \frac{1}{n^{\epsilon}}.$$

La série de terme général $1/n^{\epsilon}$ ne converge pas, il faut donc ruser un peu. Fixons $\eta > 0$ et posons $n_k = (1+\eta)^k$. Alors $\sum_k P(B_{n_k})$ converge et d'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., pour tout k suffisamment grand on a $Z_{n_k} \leq 1+\epsilon$. On encadre ensuite $n \geq 1$: $(1+\eta)^k \leq n \leq (1+\eta)^{k+1}$ et on écrit:

$$Z_n = \frac{\max(X_1,\ldots,X_n)}{\ln(n)} \leq \frac{\max(X_1,\ldots,X_{n_{k+1}})}{\ln(n)} \leq \frac{\max(X_1,\ldots,X_{n_{k+1}})}{\ln(n_{k+1})}\frac{\ln(n_{k+1})}{\ln(n_k)} = Z_{n_{k+1}}\cdot\frac{k+1}{k}.$$

Il s'ensuit que $\limsup_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

Compte tenu de la question 2, il en découle que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

Exercice 11. 1. Montrer qu'une suite de variables aléatoires réelles X_n converge en probabilité vers une variable aléatoire X si et seulement si de toute sous-suite de cette suite on peut extraire une sous-sous-suite qui converge p.s. vers X.

2. Montrer que si une suite de variables aléatoires réelles X_n converge en probabilité vers une variable aléatoire X et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(X_n)$ converge en probabilité vers $f(X)$.

3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en probabilité vers X. On suppose qu'il existe une variable aléatoire positive Y telle que $\mathbb{E}[Y] < \infty$ et $|X_n| \leq Y$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$.

Corrigé :

1. L'implication est claire, car d'après un résultat du cours on peut extraire une sous-suite convergeante p.s. vers X pour toute suite de variables aléatoires convergeant en probabilité vers X. Pour la réciproque, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\epsilon > 0$ et une extractrice ϕ telle que $\mathbb{P}(|X_{\phi(n)} - X| < \epsilon) > \epsilon$ pour tout $n \geq 1$. Par hypothèse, il existe une extractice ψ telle que $X_{\phi(\psi(n))}$ converge en probabilité vers X quand $n \to \infty$. Ceci contredit le fait que $\mathbb{P}(|X_{\phi(\psi(n))} - X| < \epsilon) > \epsilon$ pour tout $n \geq 1$.

2. D'après la première question, il suffit de montrer que si ϕ est une extractrice, il existe une extractrice ψ telle que $f(X_{\phi(\psi(n))})$ converge p.s. vers $f(X)$. D'après la première question, il existe une extractrice ψ telle que $X_{\phi(\psi(n))}$ converge p.s. vers X. La conclusion en découle par continuité de f.

3. Il suffit de montrer que pour toute extraction ϕ, il existe une autre extraction ψ telle que $\mathbb{E}\left[X_{\phi\circ\psi(n)}\right] \to \mathbb{E}\left[X\right]$ lorsque $n \to \infty$. Soit donc ϕ une extraction. D'après la première question, il existe une extraction ψ telle que $X_{\phi\circ\psi(n)}$ converge presque sûrement vers X lorsque $n \to \infty$. Le fait que $\mathbb{E}\left[X_{\phi\circ\psi(n)}\right] \to \mathbb{E}\left[X\right]$ lorsque $n \to \infty$ est alors une simple conséquence du théorème de convergence dominée.

Exercice 12. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi telle que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que pour tout $A > 0$, on a
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right) = 1,$$
et en déduire que
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty\right) = 1.$$

2. Justifier que si $(S_{n_k})_{k\geq 1}$ est une suite extraite de $(S_n)_{n\geq 1}$, alors on a :
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} \frac{S_{n_k}}{\sqrt{n_k}} = +\infty\right) = 1.$$

3. En déduire que la suite $(n^{-1/2}S_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas en probabilité.

Corrigé :

1. D'après le théorème central limite, la suite $(n^{-1/2}S_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire N de loi gaussienne centrée réduite. Soit $A > 0$. On a
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right) \geq \mathbb{P}\left(\limsup \left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > A\right\}\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > A\right).$$
La variable N étant à densité, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > A\right) = \mathbb{P}(N > A) > 0,$$

ce qui implique que $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right) > 0$. Or

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right\} \in \mathcal{F}_\infty,$$

où $\mathcal{F}_\infty$ est la tribu asymptotique $\bigcap_{n\geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\limsup \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right) = 1.$$

En considérant une suite $(A_k)_{k\geq 1} \uparrow +\infty$, on en déduit le résultat.

2. On démontre ce résultat de la même manière que le résultat précédent.

3. Si la suite $(n^{-1/2}S_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X, alors on peut extraire une sous-suite $({n_k}^{-1/2}S_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que ${n_k}^{-1/2}S_{n_k} \to X$ p.s. Or X a la même loi que N, ce qui contredit le fait que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} \frac{S_{n_k}}{\sqrt{n_k}} = +\infty\right) = 1.$$

Exercice 13 (Formule de Stirling)**.**
Question préliminaire : Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que, pour tout $a > 0$, on a :

$$\mathbb{E}(|X - \inf(X, a)|) \leq \left(\mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}(X \geq a)\right)^{1/2}.$$

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ \text{ et } \ Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

On note $x^- = \sup(-x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $n \geq 1$, vérifier que S_n suit la loi de Poisson de paramètre n, calculer $\mathbb{E}(Y_n^2)$ et en déduire que pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(Y_n^- \geq a) \leq \frac{1}{a^2}.$$

2. Soit Y une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que la suite $(Y_n^-)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y^-.

3. Montrer à l'aide de la question préliminaire que

$$\mathbb{E}(Y_n^-) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Y^-).$$

4. En déduire la formule de Stirling

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Corrigé :

(0) On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}(|X - \inf(X,a)|) = \mathbb{E}\left((X-a)\mathbf{1}_{\{X>a\}}\right) \le \mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{\{X>a\}}\right) \le \left(\mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}(X>a)\right)^{1/2}.$$

(1) On a

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_n) = 1.$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(Y_n^- \ge a) \le \frac{1}{a^2}\,\mathbb{E}((Y_n^-)^2) \le \frac{1}{a^2}\,\mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{1}{a^2}.$$

(2) D'après le théorème central limite, la suite $(Y_n)_{n\ge1}$ converge en loi vers Y. Or la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^-$ est continue donc la suite $(Y_n^-)_{n\ge1}$ converge en loi vers Y^-.

(3) Soit $a > 0$. La fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \inf(x,a)$ est continue et bornée donc

$$\mathbb{E}(\inf(Y_n^-, a)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(\inf(Y^-, a)).$$

Et

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}(Y_n^-) - \mathbb{E}(Y^-)\right| \\
&\quad\le \mathbb{E}(|Y_n^- - \inf(Y_n^-,a)|) + \left|\mathbb{E}(\inf(Y_n^-,a) - \inf(Y^-,a))\right| + \mathbb{E}(|\inf(Y^-,a) - Y^-|) \\
&\quad\le \left|\mathbb{E}(\inf(Y_n^-,a) - \inf(Y^-,a))\right| + \left(\mathbb{P}(Y_n^- \ge a)\right)^{1/2} + \left(\mathbb{P}(Y^- \ge a)\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

d'après la question préliminaire. Or $\mathbb{P}(Y_n^- \ge a) \le a^{-2}$ et

$$\mathbb{P}(Y^- \ge a) \le \frac{\mathbb{E}((Y^-)^2)}{a^2} \le \frac{\mathbb{E}(Y^2)}{a^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Ainsi,

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\mathbb{E}(Y_n^-) - \mathbb{E}(Y^-)\right| \le \frac{2}{a}.$$

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\mathbb{E}(Y_n^-) - \mathbb{E}(Y^-)\right| = 0.$$

(4) La variable aléatoire S_n suit une loi de Poisson de paramètre n donc

$$\mathbb{E}(Y_n^-) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} (n-k) e^{-n} \frac{n^k}{k!} = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{k+1}}{k!} \right) = \frac{n^{n+1}}{e^n n! \sqrt{n}} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!}.$$

Et

$$\mathbb{E}(Y^-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Donc,

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

et donc

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Exercice 14. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une v.a. réelle définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{P}$. Montrer que si $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, alors $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{Q}$.

Corrigé : La façon la plus rapide de faire cette exercice est d'utiliser ce qu'on connait déjà : d'après Radon-Nikodym on peut trouver une fonction f mesurable positive qui vérifie

$$\forall A \in \mathcal{F},\ \ \mathbb{Q}(A) = \int f \mathbf{1}_A d\mathbb{P},$$

et de plus $\int f d\mathbb{P} = 1 < \infty$, donc f est intégrable. Ensuite, par l'absolue continuité de l'intégrale,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \mathbb{Q}(A) < \varepsilon.$$

Et enfin, soit $\eta > 0$, pour n assez grand $\mathbb{P}(|X_n - X| > \eta) < \delta$, donc pour n assez grand $\mathbb{Q}(|X_n - X| > \eta) < \varepsilon$.

Exercice 15. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On suppose que Ω est dénombrable et que la tribu $\mathcal{F}$ est $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que les convergences "presque-sûre" et "en probabilité" sont équivalentes sur cet espace (pour des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique (E, d)).

Corrigé : On énumère $\Omega = \{\omega_i\}_{i\geq 1}$. Soit X et (X_n) des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que

$$X_n \xrightarrow{(P)} X.$$

Pour montrer que X_n converge p.s. vers X, il suffit de montrer que pour tout $k > 1$

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega, \limsup_{n\to\infty} d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq 1/k\}\Big) = 0.$$

Soit $\omega_i \in \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$. D'après la convergence en probabilité de X_n vers X, on a

$$\mathbb{P}(\{\omega, d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq 1/k\}) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, $\omega_i \notin \{\omega, d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq \varepsilon\}$. On en déduit que pour tout ω_i de probabilité strictement positive, $\limsup d(X_n(\omega_i), X(\omega_i)) \leq 1/k$. La dénombrabilité de Ω permet de conclure.

Exercice 16. ($\star$) Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \geq 1$, la probabilité de l'ensemble des multiples de n soit égale à $1/n$.

Corrigé : Il s'agit d'une application du lemme de Borel. Voir le polycopié de J.-F. Le Gall (Application (1) en bas de la page 117).