

# TD15 : RÉVISION

Diego Izquierdo

*Cette séance aura lieu le lundi 18 janvier à 9h. Préparez autant d'exercices que possible !*

## Exercice 0 : Questions

Préparer des questions diverses.

## Exercice 1 : Galois

Pour chacun des polynômes suivants, calculer le corps de décomposition  $L$  sur  $\mathbb{Q}$ , calculer le groupe de Galois de l'extension  $L/\mathbb{Q}$ , faire la liste de ses sous-corps intermédiaires, indiquer ceux qui sont des extensions galoisiennes de  $\mathbb{Q}$ , dire si l'extension est résoluble par radicaux :

$$\begin{aligned} f_1 = X^3 - 7X - 7, & \quad f_2 = X^4 - 10X^2 + 4, & \quad f_3 = X^{10} - 3125, \\ f_4 = X^{10} + X^5 + 1, & \quad f_5 = X^6 - 5. \end{aligned}$$

Le polynôme  $f_6 = X^5 - 5X^2 + 1$  est-il résoluble par radicaux ?

## Exercice 2 : Racine quatrième de 2

Existe-t'il une extension cyclotomique de  $\mathbb{Q}$  contenant  $\sqrt[4]{2}$  ?

## Exercice 3 : Examen 2014

Pour quelles valeurs de  $n \geq 1$  le corps  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$  (resp.  $\mathbb{Q}(\zeta_n) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$ ) s'écrit-il sous la forme  $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_r})$  où  $a_j \in \mathbb{Q}^\times$  ? Expliciter les  $a_j$  dans chaque cas.

## Exercice 4 : Rattrapage 2014

Soit  $L$  un corps de décomposition d'un polynôme  $P \in \mathbb{F}_q[X]$  irréductible. Montrer que, pour toute racine  $x$  de  $P$  dans  $L$ , on a  $L = \mathbb{F}_q(x)$ .

## Exercice 5 : Une extension biquadratique

Soit  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{-15})$ . Soit  $\mathcal{O}_K$  son anneau des entiers.

1. A quoi est isomorphe  $\mathcal{O}_K$  en tant que  $\mathbb{Z}$ -module ?
2. Calculer  $\mathcal{O}_K$ . Est-il factoriel ? Noetherien ? Intégralement clos ?
3. Faire la liste des idéaux maximaux  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{O}_K$  tels que  $\mathcal{O}_K/\mathfrak{m} \cong \mathbb{F}_2$ .
4. En déduire qu'il n'existe pas d'élément  $x$  de  $\mathcal{O}_K$  engendrant  $\mathcal{O}_K$  comme  $\mathbb{Z}$ -algèbre.

**Bon courage pour l'examen ! Et bonne continuation !**