TD16 : Intégralité

Diego Izquierdo

Aucun exercice n'est à préparer à l'avance ! La séance aura lieu le 19/01 à 14h en salle Verdier.

Exercice 1 : deux petites questions indépendantes

1. L'anneau intègre $\mathbb{Q}[X,Y]/(X^3-Y^5)$ est-il intégralement clos ?

2. Le nombre $\frac{1+\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{9}}{2}$ est-il un entier algébrique ?

Exercice 2 : Anneau des entiers d'une extension quadratique de $\mathbb{Q}$

Soit d un entier différent de 0 et 1 et sans facteurs carrés. Soit $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. On cherche à déterminer l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$.

1. Montrer qu'un élément de K est un entier algébrique si, et seulement si, $N_{K/\mathbb{Q}}(x)$ et $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(x)$ sont dans $\mathbb{Z}$.

2. En déduire que $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ si $d\not\equiv 1 \mod 4$ et que $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$ si $d\equiv 1 \mod 4$.

Exercice 3 : Extensions biquadratiques

Soient $m,n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$ distincts sans facteurs carrés. Soit $K=\mathbb{Q}(\sqrt{m},\sqrt{n})$.

1. Calculer l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K en fonction de m et n. En particulier, montrer que $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{m}}{2},\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right]$ si $m\equiv n\equiv 1 \mod 4$.

2. Dans le cas $m\equiv n\equiv 1 \mod 8$, montrer qu'il n'existe pas d'élément $x\in\mathcal{O}_K$ tel que $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}[x]$. On pourra déterminer le cardinal de l'ensemble des morphismes d'anneaux de $\mathcal{O}_K$ à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Un cas particulier de ce résultat $(m=-7, n=-15)$ faisait l'objet du premier exercice du partiel.

Exercice 4 : Anneaux d'entiers d'extensions cubiques 0

Montrer que l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ est $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

Exercice 5 : Anneaux d'entiers d'extensions cubiques 1

On pose $P=X^3-X+8\in\mathbb{Z}[X]$.

1. Montrer que P est irréductible.

On note K le corps de rupture de P sur $\mathbb{Q}$ et $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. Soit $x\in\mathcal{O}_K$ une racine de P.

2. Calculer le discriminant de P. A priori, quelles peuvent être les valeurs possibles pour le discriminant Δ_K de $\mathcal{O}_K$?

3. On note $y=\frac{x^2+x}{2}$. Quel est le polynôme minimal de y sur $\mathbb{Q}$?

4. Donner une base de $\mathcal{O}_K$ comme $\mathbb{Z}$-module.

5. Montrer que $\mathcal{O}_K/(2)$ et $\mathbb{F}_2^3$ sont des anneaux isomorphes. En déduire qu'il n'existe pas d'élément $z\in\mathcal{O}_K$ tel que $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}[z]$.

Voici un autre exemple d'extension cubique pour laquelle on peut utiliser le même type de méthodes :

6. Soit $\theta \in \mathbb{C}$ tel que $\theta^3 - \theta - 4 = 0$. Montrer que $(1, \theta, \frac{\theta+\theta^2}{2})$ est une $\mathbb{Z}$-base de l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\theta)$.

Exercice 6 : Signe du discriminant
Soit K un corps de nombres. Montrer que le signe du discriminant de K sur $\mathbb{Q}$ est égal au signe de $(-1)^{r_2}$, où r_2 est la moitié du nombre de plongements imaginaires (ie non réels) de K dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7 : Anneaux d'entiers de corps cyclotomiques 1
Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie de degré n, soit $u \in \mathcal{O}_K$ tel que $K = \mathbb{Q}(u)$. Soit p un nombre premier tel que le polynôme minimal de u sur $\mathbb{Q}$ soit d'Eisenstein en p. L'objectif de l'exercice est de montrer que p ne divise pas l'indice de $\mathbb{Z}[u]$ dans $\mathcal{O}_K$.

1. Montrer que $\frac{u^n}{p} \in \mathcal{O}_K$ et que p^2 ne divise pas $N_{K/\mathbb{Q}}(u)$.

2. Supposons que $p | [\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[u]]$.

(a) Montrer qu'il existe $x \in \mathcal{O}_K \setminus \mathbb{Z}[u]$ tel que $px \in \mathbb{Z}[u]$. En déduire qu'il existe $b_0, ..., b_{n-1} \in \mathbb{Z}$ non tous divisibles par p tels que $x = \frac{b_0 + ... + b_{n-1}u^{n-1}}{p}$.

(b) Notons r le plus petit entier tel que b_r n'est pas divisible par p. Montrer que $y = \frac{b_r u^r + ... + b_{n-1}u^{n-1}}{p}$ est dans $\mathcal{O}_K$.

(c) Montrer que $z = \frac{b_r u^{n-1}}{p} \in \mathcal{O}_K$.

(d) Obtenir une contradiction en calculant la norme de z.

3. (a) Si q est une puissance de p et $K = \mathbb{Q}(\sqrt[q]{p})$, montrer que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt[q]{p}]$.

(b) Soient p un nombre premier et $q = p^r$. Montrer que l'anneau des entiers de $K = \mathbb{Q}(\zeta_q)$ est $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_q]$.

Exercice 8 : Anneaux d'entiers de corps cyclotomiques 2
Soient p un nombre premier et $k \geq 1$ un entier. Soient $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique fixée de $\mathbb{Q}$ et $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ une racine primitive p^k-ème de l'unité. Soit $\mathcal{O}_{p^k}$ l'anneau des entiers algébriques de $\mathbb{Q}(\zeta)$. Nous allons établir par une méthode différente de celle de l'exercice 5 que $\mathcal{O}_{p^k}$ est égal à $\mathbb{Z}[\zeta]$.

1. Montrer l'identité $p = \prod_{\substack{r=1 \\ p \nmid r}}^{p^k} (1 - \zeta^r)$.

2. En déduire que $(\zeta - 1)\mathcal{O}_{p^k} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.

Supposons $k = 1$.

3. En utilisant la trace, montrer que l'anneau $\mathcal{O}_p$ est égal à $\mathbb{Z}[\zeta]$.

Revenons au cas général $k \geq 1$.

4. Montrer que l'on a $\mathcal{O}_{p^k} = \mathbb{Z}[\zeta] + p^m \mathcal{O}_{p^k}$ pour tout $m \geq 0$.

5. Montrer que le discriminant de Φ_{p^k} est, au signe près, une puissance de p (que l'on explicitera).

6. En déduire que l'anneau $\mathcal{O}_{p^k}$ est égal à $\mathbb{Z}[\zeta]$.

Exercice 9 : Anneaux d'entiers de corps cyclotomiques 3
Soient K et L deux extensions galoisiennes finies de $\mathbb{Q}$ linéairement disjointes

1. Montrer que l'application canonique $\mathrm{Gal}(KL/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ est un isomorphisme de groupes.

Soit $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_L$, resp. $\mathcal{O}_{KL}$) l'anneau des entiers de K (resp. L, resp. KL). On note Δ_K (resp. Δ_L, resp. Δ_{KL}) le discriminant de $\mathcal{O}_K$ (resp. de $\mathcal{O}_L$, resp. de $\mathcal{O}_{KL}$). On suppose que Δ_K et Δ_L sont premiers entre eux. Soient $(a_1, \dots, a_r)$ (resp. $(b_1, \dots, b_s)$) une base du $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_L$).
Soit $x = \sum_{i,j} x_{ij} a_i b_j \in \mathcal{O}_{KL}$ avec $x_{ij} \in \mathbb{Q}$. Pour $1 \leq i \leq r$, on note $x_i = \sum_j x_{ij} b_j$.

2. Montrer, pour tous i, j, que l'on a $\Delta_K x_i \in \mathcal{O}_L$, et donc $\Delta_K x_{ij} \in \mathbb{Z}$.

3. En déduire que $\mathcal{O}_{KL} = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} a_i b_j \mathbb{Z}$ et que $\Delta_{KL} = \Delta_K^{[L:\mathbb{Q}]} \Delta_L^{[K:\mathbb{Q}]}$.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers premiers entre eux. Soient $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ des racines primitives respectivement m-ème et n-ème de l'unité.

4. Montrer $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$.

5. En utilisant les exercices précédents, en déduire que l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\alpha)$ est $\mathbb{Z}[\alpha]$.

Exercice 10 : Anneaux d'entiers d'extensions cubiques 2
Soit $d \in \mathbb{Z}$, $d > 1$ sans facteur cubique. Notons $\theta = \sqrt[3]{d}$ et $K = \mathbb{Q}(\theta)$. On cherche à déterminer l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K.

1. Montrer que la base $(1, \theta, \theta^2)$ est de discriminant $\Delta = -27d^2$.

2. On écrit $d = ab^2$, avec $a, b \in \mathbb{N}$ sans facteur carré. On pose $\theta' = \sqrt[3]{a^2 b}$. Montrer que $K = \mathbb{Q}(\theta')$ et calculer le discriminant Δ' de la base $(1, \theta', \theta'^2)$.

3. Montrer que $(1, \theta, \theta')$ est une $\mathbb{Q}$-base de K et calculer son discriminant Δ''.

4. On note f, f' et f'' les indices respectifs de $\mathbb{Z}[\theta]$, $\mathbb{Z}[\theta']$ et $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta \oplus \mathbb{Z}\theta'$ dans $\mathcal{O}_K$. Soit Δ_K le discriminant de $\mathcal{O}_K$
(a) Montrer que $a \wedge f = 1$ et que $b \wedge f' = 1$. On pourra utiliser l'exercice 5.
(b) En déduire les assertions suivantes :
(i) $\Delta_K < 0$;
(ii) $a^2 b^2 | \Delta_K | 27a^2 b^2$;
(iii) si $3|a$, alors $27a^2 | \Delta_K$;
(iv) si $3|b$, alors $27b^2 | \Delta_K$.

5. Montrer que si $3|d$, alors $\Delta_K = -27a^2 b^2$ et $(1, \theta, \theta')$ est une base de $\mathcal{O}_K$.

6. Supposons que 3 ne divise pas d et que $d \pm 1$ n'est pas multiple de 9. Montrer que le polynôme minimal de $\theta - d$ est 3-Eisenstein. En utilisant l'exercice 5, en déduire que $\Delta_K = -27a^2 b^2$ et $(1, \theta, \theta')$ est une base de $\mathcal{O}_K$.

7. On suppose $d \equiv 1 \mod 9$. On pose $\alpha = \frac{1+\theta+\theta^2}{3}$.
(i) Montrer que $\alpha \in \mathcal{O}_K$ et calculer son polynôme minimal.
(ii) En déduire que $3|f''$, puis que $\Delta_K = -3a^2 b^2$.
(iii) Montrer que $(\alpha, \theta, \theta')$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_K$.

8. Supposons $d \equiv -1 \mod 9$. On pose $\alpha' = \frac{1-\theta+\theta^2}{3}$. Montrer que $(\alpha', \theta, \theta')$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_K$.

Exercice 11 : Anneaux intégralement clos et polynômes
Soit A un anneau intégralement clos de corps des fractions K.

1. Soit $P \in A[X]$ tel que $P = QR$, avec $Q, R \in K[X]$ unitaires. Montrer que $Q, R \in A[X]$.
2. Montrer que $A[X]$ est intégralement clos.

Exercice 12 : Extensions quadratiques, le retour
Soit A un anneau factoriel dans lequel 2 est inversible. Soit $a \in A$ qui n'est divisible par le carré d'aucun élément irréductible de A et qui n'est pas un carré. Montrer que $B = A[X]/(X^2 - a)$ est intégralement clos. Est-il forcément factoriel ?

Exercice 13 : Anneaux normaux et actions de groupes
Soit A un anneau intègre sur lequel agit un groupe fini G. On note A^G l'anneau des invariants.
1. Montrer que l'action de G s'étend en une action sur le corps de fractions K de A.
2. Montrer que le corps des fractions de A^G est K^G.
3. Montrer que, si A est intégralement clos, alors A^G l'est aussi.

Exercice 14 : Normalisation et singularités
1. (a) Montrer que la normalisation de $\mathbb{C}[X, Y]/(Y^3 - X^5)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[T]$.
(b) En notant V la courbe d'équation $y^3 = x^5$ dans $\mathbb{C}^2$, expliquer pourquoi cela induit un morphisme $f : \mathbb{C} \to V$. On dit qu'on a désingularisé V.
(c) Vérifier que $f : \mathbb{C} \to V$ est un homéomorphisme (pour la topologie de Zariski), mais qu'il n'existe pas de fonction polynômiale $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ telle que $g|_V$ est la fonction réciproque de f. Cela signifie en particulier que f n'est pas un isomorphisme entre les ensembles algébriques V et $\mathbb{C}$.
(d) Montrer par contre que $\mathbb{C}[X, Y]/(Y^3 - X^5)[X^{-1}]$ et $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ sont isomorphes. Cela signifie que l'ouvert de V défini par $x \neq 0$ est isomorphe à l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par $t \neq 0$. On dit que V et $\mathbb{C}$ sont birationnellement équivalents.
2. Quelle est la clôture intégrale de $\mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^3 - X^2)$? Interpréter géométriquement.
3. Même question pour $\mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^4 - X^5)$.
4. Même question pour $\mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 + 2iXY - X^3 + X - 1)$.

Exercice 15 : Norme et trace
Dans les deux questions qui suivent, on pensera à utiliser la norme et la trace.
1. Le nombre $1 + \sqrt[3]{2}$ est-il un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$?
2. Le nombre $\sqrt[7]{2}$ est-il dans $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{3})$?

Bonne continuation !