TD1 : Anneaux et idéaux
Indications de correction

Exercice 2

$(i) \Rightarrow (ii)$: si A intègre , $A[X]$ aussi on a alors $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$. Pour P de degré n, de racines $x_1, ..., x_p$, P est divisible par $(X - x_1)...(X - x_p)$ (division euclidienne).

$(iii) \Rightarrow (i)$: par l'absurde, soient a, b tels que $ab = 0$. on a forcément $a = b$ (considérer $X(X - a + b)$) . Ainsi on a $a^2 = 0$. Montrer que si $x \in A^*$ est tel que $xa \neq 0$ et $xa \neq a$ alors $x = a$. On en déduit que pour tout x différent 0 et de a , $(x - 1)a = 0$. Par le même raisonnement $x - 1$ est soit nul soit égal à a et on peut conclure.

Exercice 3

Si $x \in \mathbb{Q}$ que l'on écrit p/q avec $(p, q) = 1$ est annulé par $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$ à coefficients entiers, on multiplie l'équation $P(x) = 0$ par q^n. On obtient $p^n + q \times entier = 0$ d'où $q = 1$.

Exercice 5

2. a. Ecrire ${a_0}^{-1}f = 1 + h$ avec h somme d'éléments nilpotents donc nilpotent.

b. On écrit

$$(a_0 + ... + a_nX^n)(b_0 + ... + b_mX^m) = 1.$$

On en déduit a_0 (et b_0) inversibles . On voit que $a_nb_m = 0$ puis $a_nb_{m-1} + a_{n-1}b_m = 0$ d'où ${a_n}^2b_{m-1} = 0$ puis par récurrence ${a_n}^{m+1}b_0 = 0$ d'où ${a_n}^{m+1} = 0$.

f est inversible et a_nX^n est nilpotent donc $f - a_nX^n$ est inversible et on réitère le raisonnement précédent.

c. Pour $\mathfrak{p}$ idéal premier de A, l'application $f \mapsto \bar{f}$ (on passe au quotient sur chaque coefficient) est un homomorphisme d'anneaux. $A/\mathfrak{p}$ est intègre donc par **1**. , $\bar{f}\bar{g} = 1$ donne $\bar{f}$ constant , c'est-à-dire $a_1, ..., a_n \in \mathfrak{p}$ et ce pour tout $\mathfrak{p}$.

Exercice 6

On écrit $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - 2) \simeq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et ce dernier anneau est intègre mais ce n'est pas un corps.

Exercice 7

Par exemple considérer $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'injection canonique et (X) idéal maximal de $\mathbb{R}[X]$.

Si on suppose à présent f est surjective, alors $p \circ f : A \to B/M$ est surjective (p désigne la projection canonique $B \to B/M$) et de noyau N . La propriété universelle du quotient donne alors $B/M \simeq A/N$. A/N est donc un corps .

Exercice 8

1.

Soit $I := \{x \in A; \forall y \in A, 1 - xy \in A^\times\}$.

Si $x \in I$ et M idéal maximal de A et si $x \notin M$ alors $M + (x) = A$ d'où $1 = m + xy$ contradiciton . Si $x \in Rad(A)$ et $y \in A$ arbitraire, alors si $1 - xy$ n'est pas inversible , il appartient un idéal maximal M (conséquence du lemme de Zorn) et donc 1 appartient aussi à M (puisque x appartient à tous les idéaux maximaux de A, donc à M en particulier) , contradiction.

2. Si p désigne la projection canonique de passage au quotient par $Rad(A)$, l'exercice précédent implique que si $\bar{M}$ est un idéal maximal de $A/Rad(A)$ alors $p^{-1}(\bar{M})$ est un idéal maximal de M . Réciproquement l'image direct d'un maximal est maximal d'où bijection entre les idéaux maximaux des deux anneaux et on conclut .