Corrigé du TD1 : Langage des catégories et rappels de topologie

Exercice 1. Le foncteur groupe linéaire

1. Pour toute k-algèbre A, le déterminant det : $\mathrm{GL}_n(A) \to \mathrm{GL}_1(A)$ est défini par $M \mapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_i m_{i\sigma(i)}$. On vérifie alors que pour tout morphisme de k-algèbres $u : A \to B$, la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}_1(A) \arrow[d] \\ \mathrm{GL}_n(B) \arrow[r] & \mathrm{GL}_1(B) \end{tikzcd}$$

résulte simplement de l'égalité $\det(u(M)) = u(\det(M))$ pour tout élément $M \in \mathrm{GL}_n(A)$.

2. Pour toute k-algèbre T, le groupe $\mathrm{GL}_n(T)$ est l'ensemble des éléments $(t_{i,j}) \in T^{n^2}$ qui vérifient $\det((t_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}) \in T^\times$. Donc notons $A = k[\mathrm{GL}_n] = k[X_{1,1}, \cdots, X_{n,n}, Y]/(\det((X_{i,j})_{i,j})Y - 1)$ et considérons les transformations naturelles ϕ et ψ définies pour toute k-algèbre T de la manière suivante : $\psi : h_A(T) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(A, T) \to GL_n(T)$ associe a un morphisme $f : A \to T$ la matrice $(f(X_{i,j})$ et $\phi : \mathrm{GL}_n(A) \to h_A(T)$ associe à une matrice M, le morphisme de k-algèbres $f : A \to T$ défini par $f(X_{i,j}) = m_{i,j}$. On vérifie alors aisément que ϕ et ψ vérifient les propriétés demandées. L'unicité résulte du lemme du Yoneda : si h_B est un autre foncteur qui satisfait les mêmes hypothèses, alors on obtient deux transformations naturelles $\phi : h_A \to h_B$ et $\psi : h_B \to h_A$ inverses l'une de l'autre. On pose alors $\xi = \phi(A)(Id_A)$ et $\xi' = \psi(B)(Id_B)$. On vérifie que ces applications sont inverses l'une de l'autre. En fait le lemme de Yoneda affirme que pour tout foncteur F, on a une bijection naturelle $\mathrm{Hom}(h_A, F) \simeq F(A)$.

   Un foncteur isomorphe à un foncteur de la forme h_A sera dit *représentable* et son représentant est donc unique, à unique isomorphisme près.

3. Il s'agit du morphisme de k-algèbres $k[X, X^{-1}] \to k[\mathrm{GL}_n]$ qui envoie X sur $\det((X_{i,j}))$.

Exercice 2. Monomorphismes et épimorphismes

1. Comme le foncteur oubli des catégories Grp, Ann, k-ev vers Ens est fidèle (on dit que ces catégories sont concrètes), il suffit de vérifier qu'un morphisme injectif (resp. surjectif) dans la catégorie des ensembles est un monomorphisme (resp. épimorphisme), ce qui est immédiat.

2. Soit $f : X \to Y$ un monomorphisme dans la catégorie Ens. Soit x_1, x_2 dans X avec $f(x_1) = f(x_2)$ et soit $\psi_i : \{*\} \to X$ l'application qui envoie le point $*$ sur x_i pour $i = 1, 2$. Alors $f \circ \psi_1 = f \circ \psi_2$. D'où $\psi_1 = \psi_2$ et donc f est injectif.

   Soit $\phi : A_1 \to A_2$ un morphisme non-injectif d'anneau et $x \in A_1 \backslash \{0\}$ tel que $\phi(x) = 0$. Soit $\psi_x : \mathbb{Z}[X] \to A_1$ le morphisme donné par $\psi_x(X) = x$. Alors $\phi \circ \psi_x = \phi \circ \psi_0$ et $\psi \neq \psi_0$. Donc ϕ n'est pas un monomorphisme. Dans la catégorie Grp et k-ev, on réutilise la même technique en remplaçant $\mathbb{Z}[X]$ par un groupe libre à un générateur et un k-ev de dimension 1 respectivement.

3. Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme non-surjectif dans Ens. Pour $i = 1, 2$, soit $\psi_i : Y \to \{1, 2\}$ l'application qui envoie $\phi(X)$ sur 1 et le complémentaire de $\phi(X)$ sur i. Alors $\psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi$ mais $\phi_1 \neq \phi_2$. Dans la catégorie Grp, soit Y' la somme amalgamée de deux copies de Y le long de $\mathrm{Im}(\phi)$ (c'est le coproduit dans la catégorie des groupes, ou encore le groupe obtenu de la manière suivante : on regarde tous les mots sur deux copies disjointes de Y, on identifie les images respectives de X et on garde les opérations de groupes sur chaque copie et on met la loi de la concaténation sur l'ensemble) puis on prend ψ_i le plongement Y dans le i-ième facteur. Alors $f \circ \psi_1 = f \circ \psi_2$ et donc si f n'est pas surjectif alors $\psi_1 \neq \psi_2$ et n'est donc pas un epimorphisme. Dans la catégorie k-ev, on raisonne de même en prenant le quotient $Y \to Y/X$ et l'application nulle $Y \to Y/X$.

4. L'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est un épimorphisme qui n'est pas surjectif. En effet, soit $f, g : \mathbb{Q} \to A$ deux morphismes d'anneaux qui coïncident sur $\mathbb{Z}$. Il suffit alors de voir qu'ils coïncident sur $\frac{1}{a}$ pour tout entier non-nul a, ce qui est immédiat car $f(\frac{1}{a})$ est l'unique inverse multiplicatif de $f(a) = g(a)$ dans A.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T2.

Exercice 3. Bijections continues

1. Non, penser à l'application

$$\begin{aligned} [0,1[&\to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ t : &\mapsto e^{2i\pi t} \end{aligned}$$

qui est une bijection continue mais n'est pas un homéomorphisme. On peut faire plus simple : l'identité d'un ensemble avec deux topologies dont l'une est strictement plus fine que l'autre.

2. Rappelons que quasi-compact veut dire vérifier la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Nous allons montrer que f est nécessairement fermée (ce qui montre que sa réciproque est continue). Soit F un fermé de X. Comme X est quasi-compact, F est quasi-compact. Alors $f(F)$ est quasi-compact, donc compact puisque Y est séparé et donc aussi fermé, ce qui conclut.

Exercice 4. Compactification d'Alexandrov

1. Il suffit de vérifier que $\emptyset$ est ouvert, que toute intersection finie et toute union d'ouverts est ouverte. Tout d'abord $\emptyset$ est ouvert, puisqu'il est ouvert dans X. Considérons maintenant un ensemble fini d'ouverts $U_1, \ldots, U_n$ de $\widetilde{X}$. Si tous contiennent ∞, alors l'union finie de leurs complémentaires est compacte, donc leur intersection est ouverte. Sinon, l'un d'eux, disons U_1, est un ouvert de X, et dans ce cas $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ est un ouvert de U_1 auquel on a retiré un nombre fini de compacts, ce qui donne bien un ouvert. Enfin, prenons une collection quelconque $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de $\widetilde{X}$. Si aucun des ouverts considérés ne contient ∞, alors leur union est encore un ouvert de X, donc de $\widetilde{X}$. Sinon, $\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} U_i^c$ est une intersection de fermés (dans X) et de compacts (avec au moins un compact), donc est compacte, de sorte que $\bigcup_{i\in I} U_i$ est ouverte dans $\widetilde{X}$.

2. Montrons d'abord que $\widetilde{X}$ est séparé. Soient x et y des points distincts de $\widetilde{X}$. Si x et y sont tous les deux dans X, alors en utilisant la séparation de X on trouve des ouverts U et V de X (et donc aussi de $\widetilde{X}$) disjoints tels que $x \in U$ et $y \in V$. Supposons donc maintenant que $y = \infty$. Puisque X est localement compact, nous pouvons choisir un voisinage compact K de x contenu dans X. Alors l'intérieur et le complémentaire de K sont deux ouverts de $\widetilde{X}$ disjoints, l'un contenant x et l'autre y.

   Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de $\widetilde{X}$. Il existe $U_\infty \in \mathcal{U}$ contenant ∞ : son complémentaire K_∞ est compact. Il existe alors un $\mathcal{P}_{\text{fin}} \subseteq \mathcal{P}$ fini recouvrant K_∞. D'où la compacité de $\widetilde{X}$.
   L'inclusion $\iota : X \to \widetilde{X} \smallsetminus \{\infty\}$ est une bijection ensembliste et la topologie induite sur $\widetilde{X} \smallsetminus \{\infty\}$ est la même que celle de X, donc ι est un homéomorphisme.

3. On note $\mathcal{T}_{\text{Alex}}$ la topologie d'Alexandrov sur $\widetilde{X}$. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur $\widetilde{X}$ vérifiant :
   (a) $\widetilde{X}$ est compact,
   (b) $\mathrm{id} : X \hookrightarrow \widetilde{X} \smallsetminus \{\infty\}$ est un homéomorphisme.

   Par (b), tout ouvert de X appartient à $\mathcal{T}$ et réciproquement, si $V \in \mathcal{T}$, alors V est soit un ouvert de X, soit est de la forme $U \cup \{\infty\}$ où U est un ouvert de X.
   Si $\infty \in V \in \mathcal{T}$, alors $\widetilde{X} \smallsetminus V \subseteq \widetilde{X} \smallsetminus \{\infty\}$ est un fermé de $\widetilde{X}$, donc compact d'après (a). On a ainsi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\text{Alex}}$.
   En particulier, l'identité $(\widetilde{X}, \mathcal{T}_{\text{Alex}}) \to (\widetilde{X}, \mathcal{T})$ est continue. Montrons que sa réciproque est continue également : soit F un fermé pour la topologie d'Alexandrov. Puisque $\widetilde{X}$ est compact, c'est également un compact, et par continuité de l'identité, F est également compact pour la topologie $\mathcal{T}$, donc fermé puisque $(\widetilde{X}, \mathcal{T})$ est séparé. Ainsi, l'identité $(\widetilde{X}, \mathcal{T}_{\text{Alex}}) \to (\widetilde{X}, \mathcal{T})$ est un homéomorphisme, et on a $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{Alex}}$.

4. Par le résultat de la question 3, puisque $\mathbb{S}^n$ est compacte, il suffit de voir que l'on peut prendre un point distingué ∞ de $\mathbb{S}^n$ tel qu'on ait un homéomorphisme $\mathbb{S}^n \smallsetminus \{\infty\} \simeq \mathbb{R}^n$. En prenant pour ∞ le point $(1, 0, \ldots, 0)$, la projection stéréographique à partir de ce point permet de conclure.

« Rappel » sur la topologie quotient

Soit X un espace topologique muni d'une relation d'équivalence $R \subset X \times X$. On note $Y = X/R$ l'ensemble des classes d'équivalence de R, et on considère l'application

$$\pi : X \to X/R = Y$$

qui associé à un élément de X sa classe d'équivalence pour la relation R. La topologie quotient sur Y est la topologie la plus fine tel que π soit continue. Autrement dit, $U \subset Y$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X.

Exercice 5. Espaces projectifs

1. La restriction de l'application quotient $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{S}^n$ est continue surjective. Deux points x et y dans $\mathbb{S}^n$ ont même image dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si et seulement si $x = \pm y$, donc cela induit une bijection continue
$$\mathbb{S}^n/\{\pm 1\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}).$$
Construisons également la réciproque : pour cela, on part de l'application continue
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{S}^n \\ (x_0, \ldots, x_n) & \mapsto & \left(\frac{x_0}{||x||}, \ldots, \frac{x}{||x||}\right) \end{array}$$
où $||\cdot||$ désigne la norme euclidienne. En composant cela par l'application quotient $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\{\pm 1\}$, on voit qu'on peut passer au quotient pour obtenir une application continue $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{S}^n/\{\pm 1\}$, réciproque de la précédente. On a donc bien un homéomorphisme. Cela prouve en particulier que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est compact, car $\mathbb{S}^n/\{\pm 1\}$ l'est. On procède de même avec $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$: $\mathbb{S}^{2n+1}$ apparaît comme sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$ vu comme $\mathbb{R}^{2n+2}$. Cela montre d'ailleurs que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est compact : en effet, $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ est quasi-compact en tant qu'image du compact $\mathbb{S}^{2n+1}$ par l'application quotient, qui est continue. Pour montrer que cet espace est séparé, soient $x, y \in \mathbb{S}^{2n+1}$ d'images distinctes dans $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$. Par compacité de $\mathbb{S}^1$, la fonction $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ définie par $\lambda \mapsto ||x + \lambda y||$ atteint son minimum, qui est > 0 d'après l'hypothèse sur x et y. En choisissant $\epsilon < \frac{1}{2} \min_{\lambda \in \mathbb{S}^1} ||x + \lambda y||$ on construit des voisinages saturés disjoints de x et y en posant
$$V_x := (\cup_{\lambda \in \mathbb{S}^1} B(\lambda x, \epsilon)) \cap \mathbb{S}^{2n+1}$$
et en définissant V_y de même.
2. On a une application bien définie et continue
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{y}{x} \end{array}$$
passant au quotient en une bijection continue
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{[0:1]\} \to \mathbb{R}.$$
L'inverse de cette bijection est donné par l'application, continue également, donnée par la composée
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\} & \to & \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{[0:1]\} \\ z & \mapsto & (1, z) & \mapsto & [1:z] \end{array}$$
Ainsi, le complémentaire du point $[0:1]$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$. D'autre part, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est compact, donc la question 3 de l'exercice 3, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\mathbb{S}^1$. Le même raisonnement fonctionne pour montrer que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $\mathbb{S}^2$.
Remarque : on peut également directement utiliser l'homéomorphisme $\mathbb{S}^1/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ établi à la question précédente, puis montrer que l'application continue $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ définie par $z \mapsto z^2$ (on voit ici $\mathbb{S}^1$ comme l'ensemble des complexes de module 1) induit un homéomorphisme $\mathbb{S}^1/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{S}^1$. Pour le corps des complexes, on utilise la *fibration de Hopf* $p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, $p(z_0, z_1) = (|z_0|^2 - |z_1|^2, 2z_0\overline{z_1})$. Elle est surjective sur la sphère $\mathbb{S}^2$ de fibres isomorphes au cercle unité.

3. (a) Soit $U_0 = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n(K), x_0 \neq 0\}$, qui est ouvert car d'image réciproque l'ouvert $V_0 = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}, x_0 \neq 0\} \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'application quotient $q : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Tout élément de U_0 peut, en divisant par la première coordonnée, s'écrire sous la forme $[1 : x_1 : \ldots : x_n]$.
Ainsi, l'application ϕ_0 de l'énoncé, obtenue comme composée de q avec l'application continue

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (1, x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

est continue et bijective. D'autre part, on a une application continue et surjective bien définie

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \to & \mathbb{K}^n \\ (x_0, \ldots, x_n) & \to & \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) \end{array},$$

passant au quotient en une application $U_0 \to \mathbb{K}^n$ continue réciproque de ϕ_0, ce qui montre que ϕ_0 est un homéomorphisme.

(b) De la même manière, en posant $U_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n(K),\ x_i \neq 0\}$, on montre que U_i est homéomorphe à $\mathbb{K}^n$. L'ensemble $\{U_0, \ldots, U_n\}$ forme un recouvrement de $\mathbb{P}^n(K)$. Par symétrie, montrons que le complémentaire de U_0 est homéomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(K)$. Soit $F_0 = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n(K), x_0 = 0\}$ son complémentaire, d'image réciproque $G_0 = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}, x_0 = 0\}$ par l'application quotient q, c'est-à-dire que $F_0 = G_0/\mathbb{K}^*$. En identifiant G_0 avec $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ de manière canonique en envoyant $(0, x_1, \ldots, x_n)$ sur $(x_1, \ldots, x_n)$, on a le résultat.

Exercice 6. Tore

On commence par montrer que les espaces (a), (b) et (c) sont bien les mêmes. Notons que dans tous les cas nous construirons des bijections continues, qui seront des homéomorphismes par l'exercice 3.

Si l'on voit le cercle $\mathbb{S}^1$ comme le cercle unité du plan complexe, l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ définie par $x \mapsto e^{2i\pi x}$ passe au quotient en un homéomorphisme $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$, où $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ désigne le quotient de $\mathbb{R}$ sous l'action du groupe $\mathbb{Z}$ agissant par translations. Ceci donne directement l'homéomorphisme

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2.$$

D'autre part, il y a un paramétrage du tore de révolution T_{rev} par $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, donné par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 & \to & T_{\text{rev}} \\ (\theta, \phi) & \mapsto & ((2 + \cos\phi)\cos\theta, (2 + \cos\phi)\sin\theta, \sin\phi) \end{array}$$

(A θ fixé, les points décrivent le cercle de centre $(2cos\theta, 2\sin\theta, 0)$ et de rayon 1 obtenu en tournant celui décrit par l'énoncé d'un angle θ autour de l'axe (Oz), et à ϕ fixé, ils décrivent le cercle de centre $(0, 0, \sin\phi)$ et de rayon $2 + \cos\phi$ contenu dans le plan $z = \sin\phi$.)

Reste à relier le définition initiale du tore T à l'une de ces trois-là. T est quasi-compact comme image du compact $[0, 1]^2$ par l'application quotient le définissant. L'application continue $[0, 1]^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ définie par $(x, y) \mapsto (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y})$ passe au quotient en une bijection continue $T \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, qui est un homéomorphisme d'après l'exercice 3.

Exercice 7. Écrasements et quotients

1. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{D}^n$, on écrit $||x||$ pour la norme (euclidienne) de x. On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} f : \mathbb{D}^n \backslash \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ x & \mapsto & \left(\frac{x}{||x||}\sin(\pi||x||), \cos(\pi||x||)\right) \end{array}.$$

Cette application est bien définie et continue. Lorsque $||x|| \to 0$, sa limite est $(0, \ldots, 0, 1)$, donc f induit une application continue $\mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n$. Tout élément $x \in \partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ est envoyé sur le point $(0, \ldots, 0, -1) \in \mathbb{S}^n$. Réciproquement, tout antécédent de ce point vérifie $\cos(\pi||x||) = -1$, donc $||x|| = 1$. On vérifie de plus que f induit un homéomorphisme entre l'intérieur de $\mathbb{D}^n$ et $\mathbb{S}^n \backslash \{(0, \ldots, 0, -1)\}$. Par passage au quotient, on a alors le résultat voulu.

2. Montrons d'abord que pour chaque point $x \notin A$, on peut construire un voisinage V de A et un voisinage U de x tels que l'intersection $U \cap V$ soit vide. Pour chaque point $a \in A$, on choisit V_a voisinage de a et U_a voisinage de x tels que $V_a \cap U_a = \varnothing$. Par compacité de A, on peut choisir un sous-recouvrement fini de $\{V_a \mid a \in A\}$, que nous noterons $\{V_i \mid i = 1 \dots n\}$. Alors $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ et $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$ conviennent.
   Soit $q : X \to X/A$ est l'application quotient. On note x_0 le point dans X/A, tel que $q(A) = \{x_0\}$. Par définition, q induit un homéomorphisme entre $X \backslash A$ et $(X/A)\backslash\{x_0\}$, de sorte que $q(U)$ est ouvert. Nous avons $q^{-1}(q(V)) = V$ et $q^{-1}(q(U)) = U$, donc $q(V)$ est un ouvert contenant x_0 et $q(U)$ est un ouvert disjoint de $q(V)$, contenant $q(x)$. Ainsi, nous avons montré qu'on peut séparer x_0 de n'importe quel point distinct de x_0.
   Soient maintenant deux points $x_1 \neq x_2$ dans $X\backslash A = (X/A)\backslash\{x_0\}$: on commence par prendre dans X, par l'argument précédent, des voisinages V_1, V_2 de A et des voisinages U_1 de x_1, U_2 de x_2 vérifiant
   $$V_1 \cap U_1 = \emptyset, \quad V_2 \cap U_2 = \emptyset.$$
   Par séparation de X, quitte à réduire U_1 et U_2, on peut supposer qu'ils sont disjoints. Alors $q(U_1)$ et $q(U_2)$ sont des ouverts disjoints de X/A contenant x_1 et x_2 respectivement.
3. Prendre par exemple $A = \mathbb{Q}$ et $X = \mathbb{R}$. Puisque tout ouvert non-vide de $\mathbb{R}$ intersecte $\mathbb{Q}$, tout ouvert non-vide de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ contient le point sur lequel est envoyé $\mathbb{Q}$, et deux ouverts non-vides s'intersectent donc toujours. (Plus généralement cette construction marche donc dès que A dense dans X).
4. Il suffit de le faire quand $n = 2$. L'orbite de l'élément $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ contient toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\epsilon \neq 0$. Donc on ne peut pas le séparer de I_2 dans le quotient.

Exercice 8. Bouquet d'espaces

1. Il s'agit d'identifier tous les points de l'équateur de la sphère $\mathbb{S}^n$. Chaque hémisphère est homéomorphe à la boule $\mathbb{D}^n$ par projection sur $\mathbb{R}^n$, et si on identifie tous les points de la frontière de $\mathbb{D}^n$, on obtient le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{D}^n \simeq \mathbb{R}^n$, à savoir la sphère $\mathbb{S}^n$.
2. Le bouquet $\vee_{i \in \mathbf{N}} \mathbb{S}^1_i$ n'est pas compact : on peut trouver un recouvrement infini minimal en prenant par exemple un ϵ-voisinage du point de rattachement x de tous les cercles, ainsi que les complémentaires de x dans tous les cercles. En revanche, l'espace topologique H est compact : tout recouvrement ouvert de H contient un ouvert U contenant le point $(0, 0)$, et donc également tous les cercles de centre $(\frac{1}{n}, 0)$ pour n assez grand, de sorte que $H\backslash U$ est un fermé d'un bouquet d'un nombre fini de cercles, donc est compact.