Td n° 1 d'Analyse fonctionnelle

Dualité dans les espaces de Banach

Séance du 15 février 2010

Rappels de topologie

Métrisabilité On dit qu'un espace topologique E est métrisable si il existe une distance d sur E qui induit la topologie de E, c'est à dire telle que tout ouvert de E contient une boule pour d, et toute boule pour d contient un ouvert de E.

Topologie faible Soit E un espace de Banach. Une base fondamentale de voisinages de 0 pour la topologie faible* sur E', $\sigma(E', E)$ est donnée par les

$$V = \{f, |(f, x_i)| < \epsilon_i, i = 1..n\}.$$

De même une base fondamentale de voisinages de 0 pour la topologie faible sur E, $\sigma(E, E')$ est donnée par les

$$V = \{x, |(f_i, x)| < \epsilon_i, i = 1..n\}.$$

Théorème de Hahn-Banach, deuxième forme géométrique Soit E un espace de Banach, et $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. On suppose que A est fermé et B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Exercice 1. *Métrisabilité de la boule unité de E' pour la topologie faible**

Soit E un e.v.n. Le but de cet exercice est de montrer que la boule unité de E' est métrisable pour la topologie faible* si et seulement si E est séparable.

1. On suppose que E est séparable, et on considère la distance sur $B_{E'}$

$$d(f, g) = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} |(f - g, x_n)|,$$

où $\{x_n\}$ est une partie dénombrable dense de B_E. Montrer que cette distance induit la topologie faible sur $B_{E'}$.

2. Réciproquement, montrer que si $B_{E'}$ est métrisable, alors E est séparable.

Remarque : Symétriquement, B_E est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ si et seulement si E' est séparable.

⋆

Exercice 2. *La sphère unité n'est pas fermée pour la topologie faible*

Soit E un e.v.n de dimension infinie. On va montrer que l'adhérence faible de $\mathbb{S} = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ est $\mathbb{B} = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$.

1. Montrer que tout voisinage faible contient une droite.

2. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| < 1$. Montrer que tout voisinage faible contenant x_0 intersecte $\mathbb{S}$.

3. En utilisant le théorème de Hahn Banach, montrer que $\mathbb{B}$ est fermé pour la topologie faible. Conclure.

⋆

Exercice 3. *Non-métrisabilité de la topologie faible*

Soit E un e.v.n. de dimension infinie.

1. Soit $\phi_0, \ldots, \phi_n$ des formes linéaires sur E (pas nécessairement continues) telles que $\cap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \phi_i \subset \operatorname{Ker} \phi_0$. Montrer que $\phi_0 \in \operatorname{Vect}(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ (c'est le lemme des noyaux).

On considère E muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$, et on suppose que cette topologie est métrisable.

2. En utilisant des voisinages élémentaires de 0 pour la topologie faible, montrer qu'il existe une partie dénombrable $F \subset E'$ telle que tout $\ell \in E'$ s'exprime comme combinaison linéaire finie d'éléments de F.

3. Conclure que $(E, \sigma(E, E'))$ n'est pas métrisable.

4. Autre démonstration. En utilisant la première question de l'exercice précédent, montrer que si $(E, \sigma(E, E'))$ est métrisable, on peut construire une suite $x_n \in E$ telle que $\|x_n\| = n$ et $x_n \rightharpoonup 0$. Conclure.

⋆

Exercice 4. *ℓ^1 a la propriété de Schur*

1. Rappeler pourquoi dans un e.v.n. de dimension infinie, les topologies forte et faible sont toujours différentes.

On veut démontrer le résultat suivant : dans ℓ^1, les suites convergentes sont les mêmes pour les topologies faible et forte. Soit donc $u^n = (u^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant faiblement vers 0.

2. Montrer que pour tout k, $\lim_{n\to\infty} u^n_k \to 0$.

3. Montrer que si $u_n \nrightarrow 0$ dans ℓ^1, on peut supposer de plus que $\|u^n\|_{\ell^1} = 1$.

4. Construire par récurrence deux suites croissantes de $\mathbb{N}$ (a_k) et (n_k) telles que

$$\forall k, \qquad \sum_{j=a_k}^{a_{k+1}-1} |u^{n_k}_j| \geq \frac{3}{4}.$$

5. Montrer qu'il existe $v \in \ell^\infty$ tel que $(v, u^{n_k}) \geq \frac{1}{2}$ pour tout k. Conclure.

⋆

Exercice 5. *Convergence faible mais pas forte : trois exemples fondamentaux*

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1. (Évanescence) Montrer que $u_n(x) = \phi(x - n) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

2. (Concentration) Montrer que $v_n(x) = \sqrt{n}\phi(nx) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

3. (Oscillations) Soit $w \in L^2(0,2\pi)$ une fonction 2π-périodique non constante et $w_n(x) = w(nx)$. Montrer que $w_n \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ dans $L^2(0,2\pi)$, mais que cette convergence n'est pas forte.

⋆

Exercice 6. *Série de Fourier*

On note $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π périodiques. On veut montrer une conséquence classique du théorème de Banach-Steinhaus, à savoir que pour tout x dans $[0,2\pi[$, l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier en x diverge est un G_δ dense.

1. Démontrez le raffinement suivant du théorème de Banach-Steinhaus : soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'opérateurs linéaires continus d'un Banach E dans un e.v.n F. Alors on a l'une des deux alternatives :

– $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$,

– Pour tout y d'un G_δ dense de E, $\sup_{i\in I} \|T_i(y)\|_F = +\infty$.

On fixe $s \in \mathbb{T}$. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, on introduit les coefficients de Fourier $c_n(f)$ et la somme partielle de Fourier $S_N(f)$

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) D_N(x-t)dt,$$

avec $D_N(y) = \sum_{n=-N}^{N} e^{iny}$.

2. Montrer que $\|D_N\|_{L^1(0,2\pi)} \longrightarrow +\infty$ lorsque $N \longrightarrow +\infty$.

A N fixé, on introduit une suite g_k de fonctions continues telles que $-1 \leq g_k \leq 1$ et qui convergent simplement vers la fonction $sgn(D_N)$ (avec par exemple la convention $sgn(0) = +1$).

3. En utilisant cette suite, montrer que :

$$\|S_N(.,x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(\mathbb{T});\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\|D_N\|_{L^1(0,2\pi)}.$$

4. Conclure.

⋆