Td n° 1 d'Analyse fonctionnelle

Dualité dans les espaces de Banach

Séance du 13 février 2015

Exercice 1. *Série de Fourier*

On note $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π périodiques. On veut montrer une conséquence classique du théorème de Banach-Steinhaus, à savoir que pour tout x dans $[0, 2\pi[$, l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier en x diverge est un G_δ dense.

1. Démontrez le raffinement suivant du théorème de Banach-Steinhaus : soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'opérateurs linéaires continus d'un Banach E dans un e.v.n F. Alors on a l'une des deux alternatives :

– $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$,

– Pour tout y d'un G_δ dense de E, $\sup_{i\in I} \|T_i(y)\|_F = +\infty$.

On fixe $s \in \mathbb{T}$. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, on introduit les coefficients de Fourier $c_n(f)$ et la somme partielle de Fourier $S_N(f)$

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_N(x-t)dt,$$

avec $D_N(y) = \sum_{n=-N}^{N} e^{iny}$.

2. Montrer que $\|D_N\|_{L^1(0,2\pi)} \longrightarrow +\infty$ lorsque $N \longrightarrow +\infty$.

A N fixé, on introduit une suite g_k de fonctions continues telles que $-1 \le g_k \le 1$ et qui convergent simplement vers la fonction $sgn(D_N)$ (avec par exemple la convention $sgn(0) = +1$).

3. En utilisant cette suite, montrer que :

$$\|S_N(., x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(\mathbb{T});\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \|D_N\|_{L^1(0,2\pi)}.$$

4. Conclure.

⋆

Exercice 2. *Corollaires du théorème de Hahn-Banach*

1. Soit G un sous espace vectoriel de E, et $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue. Montrer qu'il existe $f \in E'$, prolongeant g telle que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} \underset{def}{=} \sup_{x\in G, \|x\|\le 1} g(x).$$

2. Soit $x_0 \in E$. Montrer qu'il existe $f_0 \in E'$ telle que

$$\|f_0\|_{E'} = \|x_0\|_E \quad et \quad < f_0, x_0 >= \|x_0\|^2.$$

3. Soit $x \in E$. Montrer que $\|x\| = \sup_{f\in E', \|f\|\le 1} | < f, x > |$.

$\star$

Exercice 3. *Non-métrisabilité de la topologie faible*

Soit E un e.v.n. de dimension infinie.

1. Soit $\phi_0, \dots, \phi_n$ des formes linéaires sur E (pas nécessairement continues) telles que $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \phi_i \subset \operatorname{Ker} \phi_0$. Montrer que $\phi_0 \in \operatorname{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_n)$ (c'est le lemme des noyaux).

On considère E muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$, et on suppose que cette topologie est métrisable.

2. En utilisant des voisinages élémentaires de 0 pour la topologie faible, montrer qu'il existe une partie dénombrable $F \subset E'$ telle que tout $\ell \in E'$ s'exprime comme combinaison linéaire finie d'éléments de F.

3. Conclure que $(E, \sigma(E, E'))$ n'est pas métrisable.

$\star$

Exercice 4. *ℓ^1 a la propriété de Schur*

1. Rappeler pourquoi dans un e.v.n. de dimension infinie, les topologies forte et faible sont toujours différentes.

On veut démontrer le résultat suivant : dans ℓ^1, les suites convergentes sont les mêmes pour les topologies faible et forte. Soit donc $u^n = (u_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant faiblement vers 0.

2. Montrer que pour tout k, $\lim_{n \to \infty} u_k^n \to 0$.

3. Montrer que si $u_n \nrightarrow 0$ dans ℓ^1, on peut supposer de plus que $\|u^n\|_{\ell^1} = 1$.

4. Construire par récurrence deux suites croissantes de $\mathbb{N}$ (a_k) et (n_k) telles que

$$\forall k, \qquad \sum_{j=a_k}^{a_{k+1}-1} |u_j^{n_k}| \geq \frac{3}{4}.$$

5. Montrer qu'il existe $v \in \ell^\infty$ tel que $(v, u^{n_k}) \geq \frac{1}{2}$ pour tout k. Conclure.

$\star$

Exercice 5. *Convergence faible mais pas forte : trois exemples fondamentaux*

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1. (Évanescence) Montrer que $u_n(x) = \phi(x - n) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

2. (Concentration) Montrer que $v_n(x) = \sqrt{n}\phi(nx) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

3. (Oscillations) Soit $w \in L^2(0, 2\pi)$ une fonction 2π-périodique non constante et $w_n(x) = w(nx)$. Montrer que $w_n \rightharpoonup \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w$ dans $L^2(0, 2\pi)$, mais que cette convergence n'est pas forte.

$\star$