1 Conditionnement

Exercice 1.1. Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$ et X une variable aléatoire positive sur Ω. Montrer que $\{\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) > 0\}$ est le plus petit ensemble $\mathscr{G}$-mesurable (aux ensembles négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

Exercice 1.2. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On se donne $(X_i)_{i\geq 1}$ et $(\mathscr{F}_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives et une suite de tribus de $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{E}[X_i \mid \mathscr{F}_i]$ converge en probabilité vers 0.

1. Montrer que $(X_i)_{i\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 1.3. Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ à valeurs respectivement dans E et F. Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. On suppose que X est indépendante de $\mathscr{G}$ et que Y est $\mathscr{G}$-mesurable. Montrer que pour toute fonction mesurable $g : E \times F \to \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{E}[g(X,Y)|\mathscr{G}] = \int_E g(x,Y)P_X(dx)$$

où P_X désigne la loi de X. Le terme de droite est la composée de la variable aléatoire Y par l'application $\phi : y \to \int g(x,y)P_X(dx)$ (ϕ est mesurable grâce au théorème de Fubini).

Exercice 1.4. On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes conditionnellement à $\mathscr{G}$ si pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathscr{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathscr{G} = \mathscr{F}$?
2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire Z $\mathscr{G}$-mesurable positive, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}]],$$

et aussi à: pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurable positive,

$$\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G} \vee \sigma(X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}].$$

Exercice 1.5. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace de probabilité et $(\mathscr{F}_n, n \geq 0)$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$, avec $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$. Soit $X \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Montrer que les variables $\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}]$ sont orthogonales dans L^2, et que la série

$$\sum_{n\geq 0}(\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}])$$

converge dans L^2. Montrer que si $\mathscr{F}_\infty = \bigcap_{n\geq 0}\mathscr{F}_n$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_\infty] \quad \text{dans } L^2.$$

Exercice 1.6. On se donne deux variables aléatoires réelles positives X et Y, et on suppose que $\mathbb{E}[X|Y]=Y$ et $\mathbb{E}[Y|X]=X$.

1. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X=Y$ p.s.
2. Montrer que pour toute variable aléatoire positive Z et tout $a \geq 0$,
$$\mathbb{E}[Z|Z\wedge a]\wedge a = Z\wedge a.$$
3. Montrer que le couple $(X\wedge a, Y\wedge a)$ vérifie les mêmes hypothèses que le couple (X,Y) et en déduire que $X=Y$ p.s.

Exercice 1.7. On se donne deux réels a et b strictement positifs, et (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+$ dont la loi est caractérisée par
$$\mathbb{P}(X=n,Y\leq t) = b\int_0^t \frac{(ay)^n}{n!}\exp(-(a+b)y)dy\,.$$
On rappelle la formule suivante (qui se démontre facilement par récurrence):
$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = n!.$$
Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)|X]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et toute fonction $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ mesurable telle que $h(Y)$ soit intégrable, puis $\mathbb{E}[\frac{Y}{(X+1)}]$. Calculer ensuite $\mathbb{E}[1_{\{X=n\}}|Y]$ et enfin $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 1.8. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. On note $T=X_1+\ldots+X_n$. Calculer $\mathbb{E}[h(X_1)|T]$ pour toute fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ borélienne telle que $h(X_1)$ soit mesurable. Que remarque-t-on lorsque $n=2$?

Exercice 1.9.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p,$q\in]0,1[$. On pose $Z=\mathbb{1}_{\{X+Y>0\}}$ et $\mathscr{G}=\sigma(Z)$. Calculer $\mathbb{E}(X|\mathscr{G})$ et $\mathbb{E}(Y|\mathscr{G})$. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
2. Soient U,T des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega,\mathscr{F},P)$ à valeurs dans des espaces mesurables quelconques $(\Omega',\mathscr{F}')$, $(\Omega'',\mathscr{F}'')$ telles que pour toute sous-tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$, pour toutes fonctions réelles mesurables bornées f et g définies respectivement sur $(\Omega',\mathscr{F}')$ et $(\Omega'',\mathscr{F}'')$, $\mathbb{E}(f(U)|\mathscr{G})$ et $\mathbb{E}(g(T)|\mathscr{G})$ sont indépendantes. Montrer que U ou T est constante.