1 Conditionnement

Exercice 1.1. Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$ et X une variable aléatoire positive sur Ω. Montrer que $\{\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) > 0\}$ est le plus petit ensemble $\mathscr{G}$-mesurable (aux ensembles négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

Correction : La variable aléatoire $\mathbb{E}(X|\mathscr{G})$ est par définition une application $\mathscr{G}$-mesurable, et $]0, +\infty[$ est un borélien, donc $\{\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) > 0\}$ est un ensemble $\mathscr{G}$-mesurable. De plus, par définition de l'espérance conditionnelle,

$$\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}(X|\mathscr{G})=0\}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X|\mathscr{G})\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}(X|\mathscr{G})=0\}}\right) = 0.$$

Or $X\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}(X|\mathscr{G})=0\}} \geq 0$ p.s., donc $X\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}(X|\mathscr{G})=0\}} = 0$ p.s.. Cela signifie que

$$\{X > 0\} \subset \{\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) > 0\}$$

à un ensemble négligeable près. Soit A un ensemble $\mathscr{G}$-mesurable contenant $\{X > 0\}$, i.e., sur A^c on a $X = 0$ p.s.. Alors toujours par définition de l'espérance conditionnelle on a

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathscr{G})\mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A^c}) = 0.$$

De même $\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) \geq 0$ donc sur A^c on a $\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) = 0$ p.s., c'est à dire $\{\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) > 0\} \subset A$ à un ensemble négligeable près.

Exercice 1.2. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On se donne $(X_i)_{i\geq 1}$ et $(\mathscr{F}_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives et une suite de tribus de $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{E}[X_i \mid \mathscr{F}_i]$ converge en probabilité vers 0.

1. Montrer que $(X_i)_{i\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Correction :

1. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathbb{P}(X_i > \varepsilon) > \varepsilon$ pour un certain ε et pour une infinité de $i \geq 0$. On ne raisonne que sur ces i désormais. On pose $A_i = \{\mathbb{E}[X_i \mid \mathscr{F}_i] > \varepsilon^2/10\}$, alors par hypothèse $\mathbb{P}(A_i) \to 0$ quand $i \to \infty$. On en déduit que $\mathbb{P}(\{X_i > \varepsilon\} \backslash A_i) \geq \varepsilon/2$ à partir d'un certain rang. Alors d'après les propriétés de l'espérance conditionnelle on a

$$\mathbb{E}[X_i \mathbf{1}_{A_i^c}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i|\mathscr{F}_i]\mathbf{1}_{A_i^c}] \leq \varepsilon^2/10,$$

et d'un autre côté

$$\mathbb{E}[X_i \mathbf{1}_{A_i^c}] \geq \mathbb{E}[X_i \mathbf{1}_{\{X_i > \varepsilon\}\backslash A_i}] \geq \varepsilon^2/2.$$

C'est une contradiction.

2. Il suffit de prendre $\mathscr{F}_i = \{\emptyset, \Omega\}$ et (X_i) une suite qui converge en probabilité vers 0 mais pas $\mathbb{L}^1$ vers 0.

Exercice 1.3. Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ à valeurs respectivement dans E et F. Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. On suppose que X est indépendante de $\mathscr{G}$ et que Y est $\mathscr{G}$-mesurable. Montrer que pour toute fonction mesurable $g : E \times F \to \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{E}[g(X,Y)|\mathscr{G}] = \int_E g(x,Y)P_X(dx)$$

où P_X désigne la loi de X. Le terme de droite est la composée de la variable aléatoire Y par l'application $\phi : y \to \int g(x,y)P_X(dx)$ (ϕ est mesurable grâce au théorème de Fubini).

Correction : (*Extrait du poly de J.-F. Le Gall*) La variable aléatoire $\phi(Y)$ est $\sigma(Y)$-mesurable, donc $\mathscr{G}$-mesurable. Pour montrer l'égalité p.s. $\mathbb{E}[g(X,Y)|\mathscr{G}] = \phi(Y)$, il suffit donc de vérifier que pour toute variable aléatoire Z $\mathscr{G}$-mesurable positive,

$$\mathbb{E}[g(X,Y)Z] = \mathbb{E}[\phi(Y)Z].$$

Notons $P_{(X,Y,Z)}$ la loi du triplet (X,Y,Z), qui est une mesure de probabilité sur $E \times F \times \mathbb{R}^+$. Comme X est in épendant de (Y,Z), on a

$$P_{(X,Y,Z)} = P_X \otimes P_{(Y,Z)}$$

et donc, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X,Y)Z] &= \int_{E\times F\times\mathbb{R}^+} g(x,y)zP_{(X,Y,Z)}(dx\,dy\,dz)\\
&= \int_{E\times F\times\mathbb{R}^+} g(x,y)zP_X(dx)P(Y,Z)(dy\,dz)\\
&= \int_{F\times\mathbb{R}^+} z\left(\int_E g(x,y)P_X(dx))\right)P_{(Y,Z)}(dy\,dz)\\
&= \int_{F\times\mathbb{R}^+} z\phi(y)P_{(Y,Z)}(dy\,dz)\\
&= \mathbb{E}[\phi(Y)Z]
\end{aligned}$$

ce qui était le résultat recherché.

Exercice 1.4. On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes conditionnellement à $\mathscr{G}$ si pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathscr{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathscr{G} = \mathscr{F}$?

2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire Z $\mathscr{G}$-mesurable positive, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}]],$$

et aussi à: pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurable positive,

$$\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G} \vee \sigma(X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}].$$

Correction :

1. Si $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, l'egalité s'écrit

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$$

pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives c'est à dire que X et Y sont indépendantes. Si $\mathscr{G} = \mathscr{F}$, l'égalité est triviale et on ne peut rien dire sur les variables X et Y.

2. * On suppose que pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(f(X)|\mathscr{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathscr{G}).$$

Soit Z une variable aléatoire $\mathscr{G}$-mesurable positive. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(f(X)g(Y)|\mathscr{G})Z]\\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(f(X)|\mathscr{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathscr{G})Z]\\ &= \mathbb{E}[f(X)\mathbb{E}(g(Y)|\mathscr{G})Z]\end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose que pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives, et pour toute variable aléatoire $\mathscr{G}$-mesurable positive Z,

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) = \mathbb{E}[f(X)\mathbb{E}(g(Y)|\mathscr{G})Z].$$

Alors comme $Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}]$ est $\mathscr{G}$-mesurable positive, on a

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) = \mathbb{E}[f(X)\mathbb{E}(g(Y)|\mathscr{G})Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(f(X)|\mathscr{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathscr{G})Z],$$

et par la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle, comme $\mathbb{E}(f(X)|\mathscr{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathscr{G})$ est $\mathscr{G}$-mesurable, on obtient

$$\mathbb{E}(f(X)|\mathscr{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(f(X)g(Y)|\mathscr{G}).$$

* On note $(\mathbb{H}, \mathscr{H})$ l'espace dans lequel X prend ses valeurs. L'ensemble Π des parties de Ω de la forme $X^{-1}(H) \cap G$ avec $H \in \mathscr{H}$ et $G \in \mathscr{G}$ engendre $\mathscr{G} \vee \sigma(X)$ et est stable par intersection finie. On suppose que pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives, et pour toute variable aléatoire $\mathscr{G}$-mesurable positive Z,

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) = \mathbb{E}(f(X)\mathbb{E}(g(Y)|\mathscr{G})Z).$$

En particulier, pour tous $H \in \mathscr{H}$ et $G \in \mathscr{G}$, on a

$$\mathbb{E}(g(Y)\mathbb{1}_{X^{-1}(H)}\mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(Y)|\mathscr{G})\mathbb{1}_{X^{-1}(H)}\mathbb{1}_G).$$

Par le lemme de classe monotone, puisque Π est stable par intersection finie et engendre $\sigma(X) \vee \mathscr{G}$, on sait que cette propriété caractérise $\mathbb{E}(g(Y)|\sigma(X) \vee \mathscr{G})$ parmi toutes les variables $(\sigma(X) \vee \mathscr{G})$-mesurables (c'est un résultat du cours), or $\mathbb{E}(g(Y)|\mathscr{G})$ est $(\sigma(X) \vee \mathscr{G})$-mesurable. On en déduit que

$$\mathbb{E}(g(Y)|\sigma(X) \vee \mathscr{G}) = \mathbb{E}(g(Y)|\mathscr{G}).$$

Réciproquement, on suppose que pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurable positive

$$\mathbb{E}(g(Y)|\sigma \vee \mathscr{G}) = \mathbb{E}(g(Y)|\mathscr{G}).$$

Alors, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives, et pour toute variable aléatoire $\mathscr{G}$-mesurable positive Z

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) &= \mathbb{E}(f(X)Z\mathbb{E}(g(Y)|\sigma(X) \vee \mathscr{G})) \\ &= \mathbb{E}(f(X)Z\mathbb{E}(g(Y)|\mathscr{G})).\end{aligned}$$

Exercice 1.5. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace de probabilité et $(\mathscr{F}_n, n \geq 0)$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$, avec $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$. Soit $X \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Montrer que les variables $\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}]$ sont orthogonales dans L^2, et que la série

$$\sum_{n\geq 0}(\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}])$$

converge dans L^2. Montrer que si $\mathscr{F}_\infty = \bigcap_{n\geq 0} \mathscr{F}_n$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_\infty] \quad \text{dans } L^2.$$

Correction : Pour $m > n$, $\mathscr{F}_m, \mathscr{F}_{m+1} \subset \mathscr{F}_n, \mathscr{F}_{n+1}$, donc

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n]|\mathscr{F}_m] = \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_m]$$

(de même en remplaçant n par $n+1$ et / ou m par $m+1$). En utilisant la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle, on obtient donc

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{n+1})\right)\left(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_m) - \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{m+1})\right)\right] \\ &\quad= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n)\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_m)\right) - \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n)\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{m+1})\right) - \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{n+1})\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_m)\right) \\ &\qquad + \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{n+1})\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{m+1})\right) \\ &\quad= \mathbb{E}\left((\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_m))^2\right) - \mathbb{E}\left((\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{m+1}))^2\right) - \mathbb{E}\left((\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_m))^2\right) + \mathbb{E}\left((\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{m+1}))^2\right). \\ &\quad= 0.\end{aligned}$$

Les variables $\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{n+1})$ sont donc orthogonales dans $\mathbb{L}^2$. De même, on a pour $n \geq 0$,

$$0 \leq \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{n+1})\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n)\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{n+1})\right)^2\right).$$

Pour la convergence $\mathbb{L}^2$, remarquons tout d'abord que la suite $\mathbb{E}((\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n))^2)$ est décroissante et positive, donc convergente. On déduit de ce qui précède que pour tous $p \geq 0$ et $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{n=k}^{k+p}\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{n+1})\right)^2\right) &= \sum_{n=k}^{k+p}\mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{n+1})\right)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_k)\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{k+p})\right)^2\right).\end{aligned}$$

Ainsi, la série de terme général $\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{n+1})$ vérifie le critère de Cauchy dans $\mathbb{L}^2$, elle converge donc dans $\mathbb{L}^2$. On en déduit que la suite $\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n)$ converge dans $\mathbb{L}^2$. Notons Y sa limite. Pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_p)|\mathscr{F}_n) \xrightarrow[p\to\infty]{\mathbb{L}^2} \mathbb{E}(Y|\mathscr{F}_n)$$

car par Jensen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left[\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_p)|\mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(Y|\mathscr{F}_n)\right]^2\right) &\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left([\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_p) - Y]^2|\mathscr{F}_n\right)\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left([\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_p) - Y]^2\right) \\ &\xrightarrow[p\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Or pour tout $p \geq n$,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_p)|\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_p).$$

Donc, pour tout $n \geq 0$, $Y = \mathbb{E}(Y|\mathscr{F}_n)$ c'est à dire que Y est $\mathscr{F}_n$-mesurable. Ainsi, Y est $\mathscr{F}_\infty$-mesurable. De plus, de la même manière,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_p)|\mathscr{F}_\infty) \xrightarrow[p\to\infty]{\mathbb{L}^2} \mathbb{E}(Y|\mathscr{F}_\infty) = Y$$

et pour tout $p \geq 0$, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_p)|\mathscr{F}_\infty) = \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_\infty)$. Donc $Y = \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_\infty)$.

Exercice 1.6. On se donne deux variables aléatoires réelles positives X et Y, et on suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$.

1. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X = Y$ p.s.

2. Montrer que pour toute variable aléatoire positive Z et tout $a \geq 0$,

$$\mathbb{E}[Z|Z \wedge a] \wedge a = Z \wedge a.$$

3. Montrer que le couple $(X \wedge a, Y \wedge a)$ vérifie les mêmes hypothèses que le couple (X, Y) et en déduire que $X = Y$ p.s.

Correction :

1. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X-Y)^2) &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)Y) + \mathbb{E}(Y^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2).\end{aligned}$$

En échangeant les rôles de X et Y, on obtient $\mathbb{E}((X-Y)^2) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X^2)$ et donc $\mathbb{E}((X-Y)^2) = 0$. On en déduit que les variables X et Y sont égales p.s.

2. Soit $a > 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z|Z\wedge a) &= \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{Z<a\}}|Z\wedge a)+\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{Z\geq a\}}|Z\wedge a)\\ &= \mathbb{E}((Z\wedge a)\mathbb{1}_{\{Z\wedge a<a\}}|Z\wedge a)+\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{Z\wedge a=a\}}|Z\wedge a)\\ &= (Z\wedge a)\mathbb{1}_{\{Z\wedge a<a\}}+\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{Z\wedge a=a\}}|Z\wedge a)\mathbb{1}_{\{Z\wedge a=a\}}.\end{aligned}$$

En remarquant que $\mathbb{E}(Z|Z\wedge a)\mathbb{1}_{\{Z\wedge a=a\}} \geq a\mathbb{1}_{Z\wedge a=a}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z|Z\wedge a)\wedge a &= (Z\wedge a)\mathbb{1}_{\{Z\wedge a<a\}}+a\mathbb{1}_{\{Z\wedge a=a\}}\\ &= Z\wedge a.\end{aligned}$$

3. En utilisant Jensen, puis l'inclusion $\sigma(Y\wedge a)\subset\sigma(Y)$, puis 2., on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X\wedge a|Y\wedge a) &\leq \mathbb{E}(X|Y\wedge a)\wedge a\\ &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)|Y\wedge a)\wedge a\\ &\leq \mathbb{E}(Y|Y\wedge a)\wedge a\\ &\leq Y\wedge a.\end{aligned}$$

En passant à l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}(X\wedge a)\leq\mathbb{E}(Y\wedge a),$$

et par symétrie il y a égalité. On en déduit que

$$\mathbb{E}(Y\wedge a-\mathbb{E}(X\wedge a|Y\wedge a))=0,$$

or c'est l'espérance d'une variable positive ou nulle, donc p.s.

$$Y\wedge a=\mathbb{E}(X\wedge a|Y\wedge a).$$

Par symétrie on a la même propriété en inversant X et Y, et en utilisant 1., les variables $X\wedge a$ et $Y\wedge a$ étant dans L^2, on obtient

$$\forall a>0\,,\ p.s.\qquad X\wedge a=Y\wedge a.$$

On en déduit que

$$p.s.\,,\ \forall n\in\mathbb{N}\qquad X\wedge n=Y\wedge n,$$

c'est à dire $X=Y$ p.s..

Correction : 1. Notons, pour tout $y\in\mathbb{R}^m$,

$$q(y)=\int_{\mathbb{R}^n}p(x,y)dx$$

si cette quantité est finie et $q(y) = 0$ sinon (ce qui est possible sur un ensemble de mesure nulle). C'est la densité de la loi de Y par rapport à la mesure de Lebesgue (cf précédemment). Alors on a, pour toute fonction $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ borélienne bornée,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(X,Y)g(Y)) &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} h(x,y)g(y)p(x,y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} g(y)q(y)\mathbb{1}_{q(y)>0}\int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)\frac{p(x,y)}{q(y)}dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} g(y)q(y)\int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)\nu(y,dx)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} g(y)q(y)\psi(y)dy \\
&= \mathbb{E}[\psi(Y)g(Y)],
\end{aligned}$$

où on a noté

$$\psi(y) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)\frac{p(x,y)}{q(y)}dx & \text{si } q(y)>0 \\ h(0,y) & \text{sinon}. \end{cases}$$

Puisque $\psi(Y)$ est $\sigma(Y)$-mesurable et vérifie la propriété caractéristique de $\mathbf{E}[h(X,Y)|Y]$, on en déduit que

$$\mathbf{E}[h(X,Y)|Y] = \psi(Y).$$

2. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ boréliennes bornées. On a, en utilisant Fubini,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X)g(Y-X)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X)g(Y-X)|Y)) \\
&= \mathbb{E}\left(Y^{-1}\int_0^Y f(x)g(Y-x)dx\right) \\
&= \int_0^\infty \lambda^2 y\exp(-\lambda y)y^{-1}\int_0^y f(x)g(y-x)dxdy \\
&= \int_0^\infty \lambda^2 \exp(-\lambda y)\int_0^y f(x)g(y-x)dxdy.
\end{aligned}$$

Par le changement de variables $(x,y)\mapsto(x,y-x)$, on obtient,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \lambda^2 \exp(-\lambda y)\int_0^y f(x)g(y-x)dxdy \\
&\quad= \lambda^2\int_0^\infty\int_0^\infty f(x)g(y)\exp(-\lambda(x+y))dxdy \\
&\quad= \left(\lambda\int_0^\infty f(x)\exp(-\lambda x)dx\right)\left(\lambda\int_0^\infty g(x)\exp(-\lambda x)dx\right),
\end{aligned}$$

ce qui achève la demonstration.

Exercice 1.7. On se donne deux réels a et b strictement positifs, et (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+$ dont la loi est caractérisée par

$$\mathbb{P}(X=n, Y\leq t) \,=\, b\int_0^t \frac{(ay)^n}{n!}\exp(-(a+b)y)dy\,.$$

On rappelle la formule suivante (qui se démontre facilement par récurrence):

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = n!.$$

Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)|X]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et toute fonction $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ mesurable telle que $h(Y)$ soit intégrable, puis $\mathbb{E}[\frac{Y}{(X+1)}]$. Calculer ensuite $\mathbb{E}[1_{\{X=n\}}|Y]$ et enfin $\mathbb{E}[X|Y]$.

Correction : * Pour tout $n\geq 0$, on a par le théorème de convergence dominée

$$\mathbb{P}(X=n) = \lim_{p\to\infty}\mathbb{P}(X=n, Y\leq p) = b\int_0^\infty \frac{(ay)^n}{n!}\exp(-(a+b)y)dy = \frac{b}{a+b}\left(\frac{a}{a+b}\right)^n > 0.$$

Donc, puisque $P(X=n)>0$,

$$\mathbb{E}(h(Y)|X=n) = \frac{\mathbb{E}(h(Y)\mathbb{1}_{X=n})}{\mathbb{P}(X=n)}\,.$$

On remarque que:

$$\mathbb{E}(h(Y)\mathbb{1}_{X=n}) \,=\, b\int_0^\infty h(y)\frac{(ay)^n}{n!}\exp(-(a+b)y)dy\,. \tag{1}$$

Pour justifier cette égalité assez intuitive, on peut suivre le raisonnement suivant. On vérifie facilement que (1) est vraie pour $h=\mathbb{1}_{]s,t]}$. On montre par le théorème de convergence dominée que $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y=t\}}\mathbb{1}_{\{X=n\}}) = \lim_{p\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y\in]t-1/p,t]\}}\mathbb{1}_{\{X=n\}}) = 0$ donc (1) est satisfaite pour tout $h=\mathbb{1}_I$ où I est un intervalle. Par linéarité de l'espérance et de l'intégrale, on en déduit que (1) est satisfaite pour toute fonction étagée. Toute fonction h mesurable positive étant la limite croissante d'une suite de fonctions positives étagées, on conclut grâce au théorème de convergence monotone que (1) est vraie pour toute fonction h mesurable positive. On conclut par la décomposition $h=\max(h,0)-|\min(h,0)|$ et la linéarité de l'espérance et de l'intégrale que (1) est vraie en toute généralité. En utilisant (1), on obtient:

$$\mathbb{E}(h(Y)|X=n) = \frac{\mathbb{E}(h(Y)\mathbb{1}_{X=n})}{\mathbb{P}(X=n)} = (a+b)^{n+1}\int_0^\infty h(y)\frac{y^n}{n!}\exp(-(a+b)y)dy := \phi(n),$$

et par définition

$$\mathbb{E}(h(Y)|X) = \phi(X)\,.$$

* En particulier,

$$\mathbb{E}(Y|X=n) = (a+b)^{n+1}\int_0^\infty \frac{y^{n+1}}{n!}\exp(-(a+b)y)dy = \frac{n+1}{a+b}.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+1}\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+1}|X\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{X+1}\mathbb{E}(Y|X)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\mathbb{E}(Y|X=n)\,\mathbb{1}_{\{X=n\}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\mathbb{E}(Y|X=n)\mathbb{P}(X=n) \\
&= \frac{1}{a+b}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{a+b}.
\end{aligned}$$

* Puis, pour toute fonction h mesurable telle que $h(Y)$ soit intégrable, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(Y)) &= \sum_{n=0}^{\infty} b\int_0^{\infty} h(y)\frac{(ay)^n}{n!}\exp(-(a+b)y)dy \\
&= b\int_0^{\infty} h(y)\exp(-by)dy,
\end{aligned}$$

donc la densité de la loi de Y est la fonction

$$q(y) = be^{-by}\mathbb{1}_{\{y>0\}}.$$

Ainsi, pour toute fonction h bornée,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X=n\}}h(Y)) &= b\int_0^{\infty} h(y)\frac{(ay)^n}{n!}\exp(-(a+b)y)dy \\
&= \int_0^{\infty} h(y)q(y)\frac{(ay)^n}{n!}\exp(-ay)dy \\
&= \mathbb{E}\left(h(Y)\frac{(aY)^n}{n!}\exp(-aY)\right).
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X=n\}}|Y) = \frac{(aY)^n}{n!}\exp(-aY),$$

($\sigma(Y)$-mesurabilité et propriété caractéristique vérifiée, comme précédemment).

* On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X=n\}}|Y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(aY)^n}{(n-1)!}\exp(-aY) \\
&= aY.
\end{aligned}$$

Exercice 1.8. Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. On note $T = X_1+\ldots+X_n$. Calculer $\mathbb{E}[h(X_1)|T]$ pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne telle que $h(X_1)$ soit mesurable. Que remarque-t-on lorsque $n = 2$?

Correction : Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes telles que $h(X_1)$ soit intégrable et f bornée. On a, par le changement de variables $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1, x_1+x_2,\ldots,x_1+\ldots+x_n)$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(h(X_1)f(X_1+\ldots+X_n)) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \lambda^n \exp(-\lambda(x_1+\ldots+x_n))h(x_1)f(x_1+\ldots+x_n)dx_1\ldots dx_n \\
&= \int_{\{0\le s_1\le\ldots\le s_n\}} \lambda^n \exp(-\lambda s_n)h(s_1)f(s_n)ds_1\ldots ds_n \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-2)!}\int_{\{0\le s\le t\}} \exp(-\lambda t)(t-s)^{n-2}h(s)f(t)dsdt.
\end{aligned}$$

En prenant $h \equiv 1$, on trouve que la loi de T a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}\exp(-\lambda t)\mathbb{1}_{\{t>0\}}.$$

On peut écrire le résultat précédent de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(h(X_1)f(X_1+\ldots+X_n)) \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^{\infty} dtf(t)t^{n-1}\exp(-\lambda t)\int_{\{0\le s\le t\}}(n-1)\frac{(t-s)^{n-2}}{t^{n-1}}h(s)ds. \\
&= \mathbb{E}\left(f(T)\int_0^T (n-1)\frac{(T-s)^{n-2}}{T^{n-1}}h(s)ds\right).
\end{aligned}$$

De même que précédemment ($\sigma(T)$-mesurabilité et propriété caractéristique), on en déduit que

$$\mathbb{E}(h(X_1)|T) = \frac{(n-1)}{T^{n-1}}\int_0^T (T-s)^{n-2}h(s)ds\,.$$

Si $n = 2$, on reconnait l'expression de $\mathbb{E}(h(Y))$ où Y est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,T]$ (on dit que la loi conditionnelle de X_1 sachant T est la mesure uniforme sur $[0,T]$).

Exercice 1.9. 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p,$q \in]0,1[$. On pose $Z = \mathbb{1}_{\{X+Y>0\}}$ et $\mathscr{G} = \sigma(Z)$. Calculer $\mathbb{E}(X|\mathscr{G})$ et $\mathbb{E}(Y|\mathscr{G})$. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

2. Soient U, T des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ à valeurs dans des espaces mesurables quelconques $(\Omega', \mathscr{F}')$, $(\Omega'', \mathscr{F}'')$ telles que pour toute sous-tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$, pour toutes fonctions réelles mesurables bornées f et g définies respectivement sur $(\Omega', \mathscr{F}')$ et $(\Omega'', \mathscr{F}'')$, $\mathbb{E}(f(U)|\mathscr{G})$ et $\mathbb{E}(g(T)|\mathscr{G})$ sont indépendantes. Montrer que U ou T est constante.

Correction :

1. On est dans le cas d'un conditionnement discret: les ensembles $\{Z = 0\}$ et $\{Z = 1\}$ forment une partition de Ω qui engendre $\mathscr{G}$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(X|Z=0)\,\mathbb{1}_{\{Z=0\}} + \mathbb{E}(X|Z=1)\,\mathbb{1}_{\{Z=1\}}.$$

Sur $\{Z = 0\}$, $X = 0$ p.s. et donc $\mathbb{E}(X|Z = 0) = 0$. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|Z=1) &= \frac{P(X=1)}{P(X+Y\geq 1)} \\ &= \frac{P(X=1)}{1-P(X+Y=0)} \\ &= \frac{p}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p}{p+q-pq}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) = \frac{p}{p+q-pq}\mathbb{1}_{\{Z\geq 1\}}.$$

Les rôles de X et Y étant symétriques,

$$\mathbb{E}(Y|\mathscr{G}) = \frac{q}{p+q-pq}\mathbb{1}_{\{Z\geq 1\}}.$$

Les variables aléatoires $\mathbb{E}(X|\mathscr{G})$ et $\mathbb{E}(Y|\mathscr{G})$ sont donc proportionnelles p.s. et non constantes, elles ne sont donc pas indépendantes.

2. Supposons que ni U, ni T ne soient constantes. Alors il existe des ensembles mesurables A, B des espaces d'arrivée respectifs de U, T tels que $X := 1_A(U), Y := 1_B(T)$ soient des v.a. de loi de Bernoulli de paramètres $p, q \in]0,1[$. X et Y sont indépendantes (par hypothèse en conditionnant avec la tribu $\mathscr{F}$). Par 1., l'hypothèse est mise en défaut.