

TD1 : OUTILS DE LA THÉORIE DES GROUPES

Diego Izquierdo

Il se peut qu'il y ait des coquilles (voire des erreurs...) : n'hésitez pas à me les signaler ! Et si vous avez des questions, n'hésitez pas à m'écrire (diego.izquierdo@ens.fr) ou venir me voir (bureau T12) ! Les exercices 1, 2 et 3 ont été traités pendant la séance.

Exercice 4 : Sous-groupes transitifs du groupe symétrique

Soit $n \geq 1$. Un sous-groupe de S_n est dit transitif s'il agit transitivement sur $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Montrer que n divise l'ordre de tout sous-groupe transitif de S_n .

Indications : Cela découle immédiatement de la formule des classes.

2. En déduire quels sont les sous-groupes transitifs de S_p pour p premier.

Indications : Si H est un sous-groupe transitif de S_p , alors $p \mid |H|$, et donc H contient un p -cycle. Réciproquement, un sous-groupe de S_p contenant un p -cycle est bien transitif.

3. Montrer que tout conjugué d'un sous-groupe transitif est transitif.

Indications : Soit H un sous-groupe transitif de S_p . Soient $g \in S_p$ et $x \in \{1, 2, \dots, p\}$. Comme H est transitif, il existe $h \in H$ tel que $hg^{-1}(1) = g^{-1}(x)$. Donc $ghg^{-1}(1) = x$, ce qui montre que gHg^{-1} est transitif.

4. Nous allons déterminer tous les sous-groupes transitifs de S_4 .

- (a) Quels sont les sous-groupes transitifs de S_4 d'ordre 12 ?

Indications : Soit H un sous-groupe d'ordre 12 de S_4 . D'après le lemme d'Ore, H est un sous-groupe distingué de S_4 . Par conséquent, s'il contient une transposition, il contient toutes les transpositions, et comme les transpositions engendrent S_4 , on obtient $H = S_4$: absurde ! Donc H ne contient aucune transposition. Comme toute permutation impaire est produit d'un nombre impair de transpositions, cela entraîne que H est contenu dans A_4 . Comme H est d'ordre 12, on en déduit que $H = A_4$. C'est le seul sous-groupe (transitif) d'ordre 12 de S_4 .

- (b) Exhiber un 2-Sylow H de S_4 et montrer que $H \cong D_8$.

Indications : Le groupe S_4 est d'ordre 24. Il suffit donc d'exhiber un sous-groupe de S_4 isomorphe à D_8 . Pour ce faire, on remarque que le groupe D_8 agit sur l'ensemble des sommets d'un carré. Cette action étant fidèle, elle induit un morphisme de groupes injectif $D_8 \hookrightarrow S_4$. L'image de ce morphisme est donc un sous-groupe de S_4 isomorphe à D_8 . Plus explicitement, il s'agit du sous-groupe de S_4 engendré par $s = (1\ 3)$ et $r = (1\ 2\ 3\ 4)$.

- (c) Déterminer tous les sous-groupes transitifs de H . On pourra utiliser l'exercice 3.

Indications : Soit K un sous-groupe transitif contenu dans H . D'après la question 1, son ordre est multiple de 4. En regardant la liste faite dans l'exercice 3, on voit que les sous-groupes transitifs de H sont H , $\{1, r^2, sr, sr^3\}$ et $\{1, r, r^2, r^3\}$.

- (d) Quels sont les sous-groupes transitifs de S_4 à conjugaison près ?

Indications : Soit K un sous-groupe transitif de S_4 . D'après la question 1, l'ordre de K est multiple de 4. Si K est d'ordre au moins 12, alors K est A_4 ou S_4 d'après 3.(a). Reste donc à étudier les cas où K est d'ordre 4 ou 8. Mais dans ce cas, d'après les théorèmes de Sylow, K est conjugué à un sous-groupe de H . En utilisant la question précédente, on déduit que les sous-groupes transitifs de S_4 sont S_4 , A_4 , et tous ceux qui sont conjugués à $H = \langle (1\ 3), (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$, à $\langle (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 4) \rangle$ ou à $\langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$.

Exercice 5 : Générateurs du groupe symétrique

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que la transposition $(1\ 2)$ et le n -cycle $(1\ 2\ \dots\ n)$ engendrent S_n .

Indications : Soit $H = \langle (1\ 2), (1\ 2\ \dots\ n) \rangle$. On remarque que :

$$(1\ 2\ \dots\ n)^k (1\ 2) (1\ 2\ \dots\ n)^{-k} = ((k+1)\ (k+2))$$

pour $1 \leq k \leq n-2$. Donc $(1\ 2), (2\ 3), \dots, ((n-1)\ n)$ sont dans H . Soient a et b deux éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ tels que $a < b$. On remarque alors que :

$$(a\ b) = (a\ (a+1))((a+1)\ (a+2))\dots$$

$$\dots((b-2)\ (b-1))((b-1)\ b)((b-2)\ (b-1))\dots$$

$$\dots((a+1)\ (a+2))(a\ (a+1)).$$

On en déduit que $(a\ b) \in H$, et donc que H contient toutes les transpositions. Par conséquent, $H = S_n$.

2. Dans le cas où n est premier, montrer que l'on peut remplacer la transposition $(1\ 2)$ par n'importe quelle transposition et le n -cycle $(1\ 2\ \dots\ n)$ par n'importe quel n -cycle.

Indications : On note $n = p$. Soient τ une transposition et σ un p -cycle. Il existe $g \in S_p$ et $k \in \{2, 3, \dots, p\}$ tels que $\tau = (g(1)\ g(k))$ et $\sigma = (g(1)\ g(2)\ \dots\ g(p))$. Comme p est premier, σ^{k-1} est un p -cycle qui envoie $g(1)$ sur $g(k)$, et $\langle \tau, \sigma \rangle = \langle \tau, \sigma^{k-1} \rangle$. Mais, en notant $\sigma_0 = (1\ 2\ \dots\ p)$, on a $\langle \tau, \sigma^{k-1} \rangle = (g\sigma_0^{k-1})\langle (1\ 2), (1\ 2\ \dots\ p) \rangle(g\sigma_0^{k-1})^{-1} = (g\sigma_0^{k-1})S_p(g\sigma_0^{k-1})^{-1} = S_p$, ce qui achève la preuve.

3. Soit p un nombre premier. Soit G un groupe fini qui agit fidèlement et transitivement sur un ensemble $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ à p -éléments. Supposons qu'il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x_1 = x_2, g \cdot x_2 = x_1$ et $g \cdot x_i = x_i$ pour $i \geq 2$. Montrer que $G \cong S_p$.

Indications : L'action étant fidèle, elle induit un morphisme injectif $i : G \hookrightarrow S_p$. Montrons que i est un isomorphisme. L'action étant transitive, l'ordre de G est divisible par p . Comme de plus $|G| \leq p!$, on déduit que $v_p(|G|) = 1$. Par conséquent, un p -Sylow de G est d'ordre p , ce qui montre que G possède un élément d'ordre p : l'image de cet élément par i est un p -cycle. De plus, l'image de l'élément g décrit dans l'énoncé par i est la transposition $(1\ 2)$. La question précédente permet alors de conclure que l'image de i est tout S_p . Autrement dit, i est un isomorphisme.

Exercice 6 : Autour du groupe affine

Soient $m \geq 1$ un entier naturel et R un anneau. Posons :

$$GA_m(R) = \left\{ \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in GL_m(R), a \in R^m \right\} \subseteq GL_{m+1}(R).$$

1. Pour $g \in GA_m(R)$ et $x \in R^m$, on pose $g \cdot x = Ax + a$. Montrer que cela définit une action fidèle et transitive sur R^m .

Indications : Vérification immédiate.

À partir de maintenant, on suppose que $m = 1$ et que $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. Montrer que $GA_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ s'identifie à un sous-groupe transitif de S_n , autrement dit, montrer qu'il existe un morphisme de groupes injectif $f : GA_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow S_n$.

Indications : D'après 1., $GA_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ agit fidèlement et transitivement sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3. Montrer que $GA_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ possède un sous-groupe distingué isomorphe à D_{2n} . Pour quelles valeurs de n l'image de ce sous-groupe par f est-elle contenue dans A_n ?

Indications : Considérons :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \epsilon \in \{-1, 1\}, a \in R^m \right\}.$$

On montre immédiatement que H est un sous-groupe de $GA_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ d'ordre $2n$. Il est engendré par $r = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et par $s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ces éléments vérifient les relations $r^n = 1$, $s^2 = 1$ et $srs = r^{-1}$. Par conséquent, le groupe H s'identifie à un quotient de D_{2n} . Or H et D_{2n} ont même ordre. Donc ils sont isomorphes. L'image de H par f est engendrée par $(1 \ 2 \ \dots \ n)$ et $(1 \ (n-1))(2 \ (n-2)) \dots \left(\left[\frac{n-1}{2} \right] \ (n - \left[\frac{n-1}{2} \right]) \right)$. Ces deux éléments sont dans A_n si, et seulement si, n est impair et $\frac{n-1}{2}$ est pair. Donc $f(H) \subseteq A_n$ si, et seulement si, $n \equiv 1 \pmod{4}$.

4. Montrer que pour $n \in \{3, 4, 6\}$ on a $GA_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong D_{2n}$.

Indications : On vérifie immédiatement que, pour de tels n , on a $|GA_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})| = |D_{2n}|$. La question précédente permet alors de conclure.

5. Dresser la liste des sous-groupes de $GA_1(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Lesquels sont distingués ?

Indications : On a $|GA_1(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})| = 20$. Il est engendré par $r = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et par $t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Plus précisément, on a $r^5 = t^4 = 1$, $trt^{-1} = r^2$, et $GA_1(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) = \{r^j t^k | 0 \leq j \leq 4, 0 \leq k \leq 3\}$.

- Sous-groupes d'ordre 1 : $\{1\}$.
- Sous-groupes d'ordre 2 : $\{1, t^2\}$, $\{1, t^2r\}$, $\{1, t^2r^2\}$, $\{1, t^2r^3\}$, $\{1, t^2r^4\}$ car $t^2, t^2r, t^2r^2, t^2r^3, t^2r^4$ sont les seuls éléments d'ordre 2 de $GA_1(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.
- Sous-groupes d'ordre 4 : $\langle t \rangle$, $\langle rt \rangle$, $\langle r^2t \rangle$, $\langle r^3t \rangle$, $\langle r^4t \rangle$, puisque tous les 2-Sylow sont conjugués à $\langle t \rangle$.
- Sous-groupes d'ordre 5 : $\langle r \rangle$ puisque c'est un groupe distingué et tous les 5-Sylow sont conjugués.
- Sous-groupes d'ordre 10 : un tel sous-groupe G contient un élément un élément d'ordre 5 : il contient donc r . Les sous-groupes d'ordre 10 de $GA_1(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ sont alors les images réciproques des sous-groupes d'ordre 2 de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par la surjection canonique $GA_1(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \rightarrow GA_1(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})/G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Donc $\langle t^2, r \rangle$ est le seul sous-groupe d'ordre 10 de $GA_1(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.
- Sous-groupes d'ordre 20 : $GA_1(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.

Les sous-groupes distingués sont $GA_1(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$, $\langle t^2, r \rangle$, $\langle r \rangle$ et $\{1\}$.

Exercice 7 : Groupes résolubles

On rappelle qu'un groupe G est dit résoluble s'il existe une suite de sous-groupes emboîtés $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_r = 1$. telle que G_{i+1}/G_i est abélien pour $i \in \{0, 1, \dots, r - 1\}$. Pour chaque groupe G on note $D(G)$ son sous-groupe dérivé et $D^n(G) = D(D^{n-1}(G))$.

1. Montrer qu'un groupe G est résoluble si, et seulement si, il existe un entier naturel n tel que $D^n(G) = 1$.

Indications : Voir le théorème 5.12 du polycopié d'Algèbre 1.

2. (a) Montrer que tout sous-groupe d'un groupe résoluble est résoluble.
 (b) Montrer que tout quotient d'un groupe résoluble est résoluble.
 (c) Montrer que si G est un groupe possédant un sous-groupe distingué résoluble H tel que G/H est résoluble, alors G est résoluble.

Indications : Voir la proposition 5.14 du polycopié d'Algèbre 1.

3. (a) Pour quelles valeurs de n le groupe S_n est-il résoluble ?

Indications : Pour $n = 1$ ou $n = 2$, le groupe S_n est abélien donc résoluble. Pour $n = 3$, la suite $S_3 \triangleright \langle (1 \ 2 \ 3) \rangle \triangleright 1$ montre que S_3 est résoluble. Pour $n = 4$, la suite $S_4 \triangleright A_4 \triangleright \langle (1 \ 2)(3 \ 4), (1 \ 3)(2 \ 4) \rangle \triangleright 1$ montre que S_4 est résoluble. Pour $n \geq 5$, le groupe A_n est simple et non abélien, donc non résoluble : on déduit alors de 2.(a) que S_n n'est pas résoluble.

- (b) Pour quelles valeurs de n le groupe D_{2n} est-il résoluble ?

Indications : Soit r une rotation d'ordre n dans D_{2n} . La suite $D_{2n} \triangleright \langle r \rangle \triangleright 1$ montre que D_{2n} est toujours résoluble.

- (c) Pour quelles valeurs de n le groupe $GA_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est-il résoluble ?

Indications : Notons $r = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La suite $GA_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \triangleright \langle r \rangle \triangleright 1$ montre que $GA_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est toujours résoluble.

Exercice 8 (difficile) : Sous-groupes résolubles transitifs de S_p

Soit p un nombre premier. Dans cet exercice, nous allons étudier les sous-groupes résolubles transitifs de S_p . Pour ce faire, on rappelle qu'il est possible de voir $GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ comme sous-groupe de S_p , et on note $\tau \in GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la translation $x \mapsto x + 1$.

0. (*Question préliminaire*) Montrer que si $g \in S_p$ vérifie $g\tau g^{-1} \in GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, alors $g \in GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Indications : Dans tout cet exercice, on verra S_p comme le groupe des permutations de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (au lieu de $\{1, 2, \dots, p\}$). Les seuls éléments d'ordre p dans $GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ sont les τ^k avec $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Il existe donc $k \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que $g\tau g^{-1} = \tau^k$. Autrement dit : $(g(0) \ g(1) \ \dots \ g(p-1)) = (0 \ k \ 2k \ \dots \ (p-1)k)$. Donc $g(x) = g(0) + kx$, et $g \in GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

1. Montrer que tout sous-groupe de S_p conjugué à un sous-groupe de $GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ contenant τ est un sous-groupe résoluble transitif de S_p .

Indications : D'après la question 3.(c) de l'exercice 7, le groupe $GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est résoluble. Donc, d'après la question 2.(a) de l'exercice 7, tout sous-groupe de $GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est résoluble. Il est alors immédiat de voir que tout conjugué de $GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ dans S_p est résoluble. Pour conclure, il suffit donc d'invoquer les questions 2. et 3. de l'exercice 4.

2. Soit H un sous-groupe résoluble transitif de S_p . On considère une suite de sous-groupes emboîtés $H = H_0 \triangleright H_1 \triangleright \dots \triangleright H_r = 1$ telle que, pour $i \in \{0, \dots, r-1\}$, le groupe H_i/H_{i+1} est cyclique d'ordre premier.

- (a) Expliquer pourquoi une telle suite existe.

Indications : D'après la question 2 de l'exercice 7, les facteurs simples de H sont résolubles. Mais les groupes simples résolubles sont les groupes cycliques d'ordre premier.

- (b) En tant que sous-groupes de S_p , les H_i (pour $i \in \{0, \dots, r\}$) agissent sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que H_{r-1} agit transitivement sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, puis que $H_{r-1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Indications : On sait que $H = H_0$ agit transitivement sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit $j \in \{0, \dots, r-2\}$ tel sur H_j agit transitivement sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On sait que $\text{Stab}_0(H_j)$ est d'indice p dans H_j . Donc le groupe $\langle H_{j+1}, \text{Stab}_0(H_j) \rangle$ est soit $\text{Stab}_0(H_j)$ soit H_j .

- Dans le premier cas, $H_{j+1} \subseteq \text{Stab}_0(H_j)$. Pour chaque $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, il existe $h_x \in H_j$ tel que $h_x \cdot 0 = x$. On a alors, pour $h \in H_{j+1}$, la relation $h \cdot x = (hh_x) \cdot 0 = h_x \cdot ((h_x^{-1}h h_x) \cdot 0) = h_x \cdot 0 = x$. C'est absurde car $H_{j+1} \neq \{1\}$.
- Dans le deuxième cas, comme H_{j+1} est distingué dans H_j , on a $H_j = \{hs \mid h \in H_{j+1}, s \in \text{Stab}_0(H_j)\}$. Comme H_j agit transitivement, on déduit que H_{j+1} agit transitivement.

On a donc montré par récurrence que H_{r-1} agit transitivement sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On en déduit que p divise l'ordre de H_{r-1} . Donc $H_{r-1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

- (c) En déduire que H est conjugué à un sous-groupe de $GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

contenant τ .

Indications : Soit σ un générateur de H_{r-1} . C'est un p -cycle. Il existe donc $g \in S_p$ tel que $g\sigma g^{-1} = \tau$. On en déduit que $gH_{r-1}g^{-1} \subseteq GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Soit maintenant $j \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ tel que $gH_jg^{-1} \subseteq GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Comme gH_jg^{-1} est distingué dans $gH_{j-1}g^{-1}$, la question préliminaire permet de conclure que $gH_{j-1}g^{-1} \subseteq GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. On obtient donc par récurrence que $gHg^{-1} \subseteq GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

- (d) Combien de sous-groupes résolubles transitifs possède S_p à conjugaison près ?

Indications : On a montré que les sous-groupes résolubles transitifs sont, à conjugaison près, ceux qui sont contenus dans $GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et qui contiennent τ . Ils sont donc en bijection avec les sous-groupes de $GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/\langle\tau\rangle \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Il y en a donc $\phi(p-1)$.

3. Montrer qu'un élément non trivial d'un sous-groupe résoluble transitif de S_p possède au plus un point fixe.

Indications : Cette propriété est aisément vérifiée pour les éléments de $GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

4. Soit H un sous-groupe transitif de S_p tel que tout élément de H a au plus un point fixe. Soit S l'ensemble des éléments de H n'ayant pas de point fixe.

- (a) Montrer que S est stable par conjugaison par tout élément de H .

Indications : Vérification facile.

- (b) Montrer que $|S| = p - 1$, puis qu'il existe un p -cycle σ tel que $S = \{\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{p-1}\}$.

Indications : Comme tout élément de H a au plus un point fixe, les $(\text{Stab}_x(H) \setminus \{1\})_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ et S forment une partition de $H \setminus \{1\}$. Par conséquent, $\sum_x (|\text{Stab}_x(H)| - 1) + |S| = |H| - 1$. Or H est un sous-groupe transitif de S_p . Donc, pour tout x , on a $|H| = p|\text{Stab}_x(H)|$. On en déduit que $|S| = p - 1$. Comme H est un sous-groupe transitif de S_p , il contient un p -cycle σ . On remarque alors que $\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{p-1}$ sont dans S . Comme $|S| = p - 1$, on a bien $S = \{\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{p-1}\}$.

- (c) Dédire de ce qui précède que H est un groupe résoluble.

Indications : Soit $g \in S_p$ tel que $g\sigma g^{-1} = \tau$. D'après la question (a), l'ensemble gSg^{-1} est stable par conjugaison par tout élément de gHg^{-1} . En utilisant la question préliminaire, on déduit que $gHg^{-1} \subseteq GA_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, et donc que H est résoluble.

Exercice 9 : Produits semi-directs

1. Montrer que $S_n \cong A_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le produit est-il direct ?

Indications : La suite exacte $1 \rightarrow A_n \rightarrow S_n \rightarrow \{-1, 1\} \rightarrow 1$ induite par la signature est scindée, puisque S_n contient des éléments d'ordre 2. Donc $S_n \cong A_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour $n > 2$, si τ est une transposition, le sous-groupe $\{1, \tau\}$ n'est pas distingué, et donc le produit n'est pas direct. Pour $n \leq 2$, le produit est évidemment direct.

2. Montrer que $D_{2n} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le produit est-il direct ?

Indications : Soit r une rotation d'ordre n dans D_{2n} . On a alors une suite exacte $1 \rightarrow \langle r \rangle \rightarrow D_{2n} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1$. Elle est scindée puisque D_{2n} contient des éléments d'ordre 2, et donc $D_{2n} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le produit n'est pas direct pour $n > 2$ puisque D_{2n} n'est pas abélien. Pour $n \leq 2$, le produit est bien direct.

3. Montrer que $GA_m(R) \cong R^m \rtimes GL_m(R)$. Le produit est-il direct ?

Indications : Notons :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} Id & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in R^m \right\}.$$

On a une suite exacte $1 \rightarrow H \rightarrow GA_m(R) \rightarrow GL_m(R) \rightarrow 1$. Elle est scindée par :

$$GL_m(R) \rightarrow GA_m(R), A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et H est isomorphe à R^m en tant que groupe. Donc $GA_m(R) \cong R^m \rtimes GL_m(R)$. Le produit est direct si, et seulement si, pour tout $A \in GL_m(R)$ et tout $a \in R^m$, on a $Aa = a$. Cela n'est possible que si $m = 1$ et $R^\times = 1$. En particulier, pour que le produit soit direct, il faut que R soit de caractéristique 2.