Td n° 1 d'EDP

Problèmes elliptiques

Séance du 3 octobre 2014

Exercice 1. *Inégalité de Carleman*

Soit Ω un ouvert borné.

1. Soit $h > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}^n$ de norme 1. On note $P_0 = -h^2\Delta$, défini sur $H^2 \cap H^1_0$. Soit $\phi : x \mapsto \alpha.x$. A quoi correspond l'opérateur $P_{0,\phi} = e^{\frac{\phi}{h}} P_0 e^{-\frac{\phi}{h}}$?

2. En écrivant $P_{0,\phi} = A + iB$ où A et B sont deux opérateurs symétriques (pour le produit scalaire $< u, v >= \int_\Omega u\bar{v}$), montrer que

$$\forall u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0,\ \|P_{0,\phi}u\|^2_{L^2} = \|Au\|^2_{L^2} + \|Bu\|^2_{L^2}.$$

3. Montrer

$$\forall u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0,\ h\|u\|_{L^2} \leq C(\Omega)\|Bu\|_{L^2}.$$

4. Soit $q \in L^\infty(\Omega)$. On définit $P_\phi = P_{0,\phi} + q$. En déduire qu'il existe h_0 tel que

$$\forall 0 < h \leq h_0,\ \in H^2(\Omega) \cap H^1_0,\ \|u\|_{L^2} \leq Ch\|e^{\frac{\phi}{h}}(-\Delta + q)e^{-\frac{\phi}{h}}u\|_{L^2}.$$

5. Montrer que $\forall 0 < h \leq h_0$, $\forall f \in L^2(\Omega)$, il existe $r \in L^2(\Omega)$ solution de

$$e^{\frac{\phi}{h}}(-\Delta + q)e^{-\frac{\phi}{h}}r = f,$$

et que cette solution vérifie

$$\|r\|_{L^2} \leq Ch\|f\|_{L^2}.$$

6. Montrer que l'on peut construire des solutions u de $(-\Delta + q)u = 0$ sous la forme $u = e^{-\frac{1}{h}(\phi + i\psi)}(1 + r)$, où $\phi = \alpha.x$, $\psi = \beta.x$ avec β bien choisi, et $r \in L^2$ qui satisfait,

$$\forall 0 < h \leq h_0,\ \|r\|_{L^2} \leq Ch.$$

⋆

Exercice 2. *Energie de Dirichlet*

Soit Ω un ouvert borné. On considère $Q : \gamma \in C^\infty(\bar{\Omega}) \mapsto Q_\gamma$ où

$$Q_\gamma : f \mapsto \int \gamma|\nabla u|^2,$$

avec u solution de

$$\begin{cases} div(\gamma\nabla u) = 0, \text{ dans } \Omega \\ u = f, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Montrer que

$$dQ|_{\gamma=1}(h)(f) = \int_\Omega h|\nabla v|^2,$$

où v est solution de

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \text{ dans } \Omega \\ v = f, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$\star$

Exercice 3. *Généralisation de l'inégalité de Cacciopoli*

Soient $A = (a_{ij}(x)) \in L^\infty(\Omega, M_d(\mathbb{R}))$ une matrice telle qu'il existe $C, \alpha > 0$ tels que

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = (A(x)\xi).\xi \leq C|\xi|^2.$$

Soit $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ et $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur linéaire défini par

$$\begin{aligned} Lu &= -div(A(x)\nabla u) + b(x).\nabla u) + c(x)u \\ &= -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\left(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_{x_i}u + c(x)u. \end{aligned}$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ tels que $Lu = f$. Soit $\Omega' \subset \Omega$ un ouvert tel que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Montrer que

$$\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} (u^2 + f^2) dx.$$

Indication : On pourra utiliser comme fonction test $\eta^2 u$ où $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ et vaut 1 sur Ω'.

$\star$

Exercice 4. *Problème de Dirichlet à coefficients variables*

On considère l'opérateur L de l'exercice 3. On suppose Ω borné. Étant donné $f \in H^{-1}(\Omega)$, on cherche à résoudre le problème

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \Omega, \\ u = 0 & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer qu'il existe $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\mu \geq \mu_0$, pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe une unique solution faible $u \in H_0^1$ de (1).

2. Soit $\mu \geq \mu_0$, on note Tf cette solution. Montrer que T est un endomorphisme compact de $L^2(\Omega)$.

3. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ quelconque. Montrer que pour $f = 0$, l'ensemble des solutions faibles de (1) est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $L^2(\Omega)$, qu'on note d. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$ de dimension d tel que (1) admet une solution si et seulement si $f \in F^\perp$.

$\star$