Td n° 2 d'Analyse fonctionnelle

Dualité dans les espaces de Banach

Séance du 22 février 2013

Exercice 1. *Fonction convexe conjuguée*

Soit E un e.v.n et $\phi : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement (s.c.i). $D(\phi) = \{x, \phi(x) < +\infty\}$ n'est pas forcément E tout entier. Rappelons qu'une fonction ϕ est dite s.c.i. si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E, \phi(x) \leq \lambda\}$ est fermé.

On définit la fonction convexe conjuguée de ϕ pour tout $f \in E'$

$$\phi^*(f) = \sup_{x \in E} \big(< f, x >_{E' \times E} - \phi(x) \big)$$

(cette fonction peut éventuellement valoir $+\infty$).

1. Expliquer pourquoi cette fonction est convexe s.c.i.

2. On introduit $\phi^{**}(x) = \sup_{f \in E'} \big(< f, x >_{E' \times E} - \phi^*(f) \big)$. Montrer que $\phi^{**} \equiv \phi$ (c'est le théorème de Fenchel-Moreau).

Indication : On pourra introduire l'épigraphe de ϕ, $Epi(\phi) = \{(x, \lambda), \quad \phi(x) \leq \lambda\} \subset E \times \mathbb{R}$ et supposer dans un premier temps que $\phi \geq 0$.

⋆

Exercice 2. *Métrisabilité de la boule unité de E' pour la topologie faible**

Soit E un e.v.n. Le but de cet exercice est de montrer que la boule unité de E' est métrisable pour la topologie faible* si et seulement si E est séparable.

1. On suppose que E est séparable, et on considère la distance sur $B_{E'}$

$$d(f, g) = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} |(f - g, x_n)|,$$

où $\{x_n\}$ est une partie dénombrable dense de B_E. Montrer que cette distance induit la topologie faible sur $B_{E'}$.

2. Réciproquement, montrer que si $B_{E'}$ est métrisable, alors E est séparable.

Remarque : Symétriquement, B_E est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ si et seulement si E' est séparable.

⋆

Exercice 3. *La sphère unité n'est pas fermée pour la topologie faible*

Soit E un e.v.n de dimension infinie. On va montrer que l'adhérence faible de $\mathbb{S} = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ est $\mathbb{B} = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$.

1. Montrer que tout voisinage faible contient une droite.

2. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| < 1$. Montrer que tout voisinage faible contenant x_0 intersecte $\mathbb{S}$.

3. En utilisant le théorème de Hahn Banach, montrer que $\mathbb{B}$ est fermé pour la topologie faible. Conclure.

⋆

Exercice 4. *Non-métrisabilité de la topologie faible*

Soit E un e.v.n. de dimension infinie.

1. Soit $\phi_0, \ldots, \phi_n$ des formes linéaires sur E (pas nécessairement continues) telles que $\cap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \phi_i \subset \operatorname{Ker} \phi_0$. Montrer que $\phi_0 \in \operatorname{Vect}(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ (c'est le lemme des noyaux).

On considère E muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$, et on suppose que cette topologie est métrisable.

2. En utilisant des voisinages élémentaires de 0 pour la topologie faible, montrer qu'il existe une partie dénombrable $F \subset E'$ telle que tout $\ell \in E'$ s'exprime comme combinaison linéaire finie d'éléments de F.

3. Conclure que $(E, \sigma(E, E'))$ n'est pas métrisable.

4. Autre démonstration. En utilisant la première question de l'exercice précédent, montrer que si $(E, \sigma(E, E'))$ est métrisable, on peut construire une suite $x_n \in E$ telle que $\|x_n\| = n$ et $x_n \rightharpoonup 0$. Conclure.

⋆

Exercice 5. *ℓ^1 a la propriété de Schur*

1. Rappeler pourquoi dans un e.v.n. de dimension infinie, les topologies forte et faible sont toujours différentes.

On veut démontrer le résultat suivant : dans ℓ^1, les suites convergentes sont les mêmes pour les topologies faible et forte. Soit donc $u^n = (u_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant faiblement vers 0.

2. Montrer que pour tout k, $\lim_{n \to \infty} u_k^n \to 0$.

3. Montrer que si $u_n \not\to 0$ dans ℓ^1, on peut supposer de plus que $\|u^n\|_{\ell^1} = 1$.

4. Construire par récurrence deux suites croissantes de $\mathbb{N}$ (a_k) et (n_k) telles que

$$\forall k, \qquad \sum_{j=a_k}^{a_{k+1}-1} |u_j^{n_k}| \geq \frac{3}{4}.$$

5. Montrer qu'il existe $v \in \ell^\infty$ tel que $(v, u^{n_k}) \geq \frac{1}{2}$ pour tout k. Conclure.

⋆

Exercice 6. *Convergence faible mais pas forte : trois exemples fondamentaux*

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1. (Évanescence) Montrer que $u_n(x) = \phi(x - n) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

2. (Concentration) Montrer que $v_n(x) = \sqrt{n}\phi(nx) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

3. (Oscillations) Soit $w \in L^2(0, 2\pi)$ une fonction 2π-périodique non constante et $w_n(x) = w(nx)$. Montrer que $w_n \rightharpoonup \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w$ dans $L^2(0, 2\pi)$, mais que cette convergence n'est pas forte.

⋆