Td n° 2 d'Analyse fonctionnelle

Dualité dans les espaces de Banach

Séance du 21 février 2014

Exercice 1. *Métrisabilité de la boule unité de E' pour la topologie faible**

Soit E un e.v.n. Le but de cet exercice est de montrer que la boule unité de E' est métrisable pour la topologie faible* si et seulement si E est séparable.

1. On suppose que E est séparable, et on considère la distance sur $B_{E'}$

$$d(f,g) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f-g, x_n)|,$$

où $\{x_n\}$ est une partie dénombrable dense de B_E. Montrer que cette distance induit la topologie faible sur $B_{E'}$.

2. Réciproquement, montrer que si $B_{E'}$ est métrisable, alors E est séparable.

Remarque : Symétriquement, B_E est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ si et seulement si E' est séparable.

⋆

Exercice 2. *ℓ^1 a la propriété de Schur*

1. Rappeler pourquoi dans un e.v.n. de dimension infinie, les topologies forte et faible sont toujours différentes.

On veut démontrer le résultat suivant : dans ℓ^1, les suites convergentes sont les mêmes pour les topologies faible et forte. Soit donc $u^n = (u^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant faiblement vers 0.

2. Montrer que pour tout k, $\lim_{n\to\infty} u^n_k \to 0$.
3. Montrer que si $u_n \nrightarrow 0$ dans ℓ^1, on peut supposer de plus que $\|u^n\|_{\ell^1} = 1$.
4. Construire par récurrence deux suites croissantes de $\mathbb{N}$ (a_k) et (n_k) telles que

$$\forall k, \quad \sum_{j=a_k}^{a_{k+1}-1} |u^{n_k}_j| \geq \frac{3}{4}.$$

5. Montrer qu'il existe $v \in \ell^\infty$ tel que $(v, u^{n_k}) \geq \frac{1}{2}$ pour tout k. Conclure.

⋆

Exercice 3. *Convergence faible mais pas forte : trois exemples fondamentaux*

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1. (Évanescence) Montrer que $u_n(x) = \phi(x-n) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.
2. (Concentration) Montrer que $v_n(x) = \sqrt{n}\phi(nx) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

3. (Oscillations) Soit $w \in L^2(0, 2\pi)$ une fonction 2π-périodique non constante et $w_n(x) = w(nx)$. Montrer que $w_n \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ dans $L^2(0, 2\pi)$, mais que cette convergence n'est pas forte.

⋆

Exercice 4. *Théorème de représentation sur* $(L^1)'$

Le but de cet exercice est de montrer que $(L^1)'$ peut être identifié à L^∞. On se donne $\phi \in L^1(\Omega)'$. On veut donc montrer qu'il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ tel que

$$< \phi, f >= \int uf \quad \forall f \in L^1,$$

et de plus $\|u\|_{L^\infty} = \|\phi\|_{(L^1)'}$.

1. On fixe $w \in L^2(\Omega)$ tel que pour tout K compact de Ω, $w \geq \epsilon_K > 0$. Construire u à l'aide de w.

Indication : On pourra utiliser le théorème de représentation dans L^2, et montrer que pour $C > \|\phi\|_{(L^1)'}$,l'ensemble $A = \{x \in \Omega, |u(x)| > C\}$ est négligeable.

2. Attention ! La réciproque est fausse. Construire une forme linéaire sur $(L^\infty)'$ qui ne peut pas se représenter sous la forme $< \phi, f >= \int uf$ avec $u \in L^1$.

⋆

Exercice 5. *Théorème de Dunford-Pettis*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer que pour toute suite $f_n \in L^1(\Omega)$ bornée, on peut en extraire une sous suite qui converge pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ si et seulement si la famille $\{f_n\}$ est équiintégrable.

On considére dans un premier temps une suite de fonctions $f_n \in L^1(\Omega)$ bornée et équiintégrable. On peut supposer $f_n \geq 0$ pour tout n.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose $f_n^k = f_n \chi_{\{f_n \leq k\}}$. Montrer que $\sup_n \|f_n - f_n^k\| \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$.

2. Montrer que pour tout k, on peut extraire de $(f_n^k)_n$ une suite qui converge faiblement pour $\sigma(L^1, L^\infty)$. On note f^k la limite.

3. Montrer que f^k converge fortement dans L^1. On note f sa limite.

Indication : On pourra utiliser le théorème de Beppo-Levi.

4. Montrer que l'on peut extraire de f_n une sous suite qui converge faiblement pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers f.

On montre maintenant la réciproque. Soit f_n une suite de $L^1(\Omega)$ convergeant faiblement vers f. Notons $\mathfrak{X}$ l'ensemble des fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables de Ω. On introduit les ensembles :

$$X_n := \left\{ 1_A \in \mathfrak{X},\ \forall k \geq n,\ \left| \int_A (f_k(x) - f(x))dx \right| \leq \varepsilon \right\}.$$

5. Montrer que $\mathfrak{X}$ et X_n sont des fermés (forts) de L^1.

6. Utiliser le théorème de Baire, et montrer que (f_n) est nécessairement uniformément intégrable.

⋆

Exercice 6. *Uniforme intégrabilité*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^1(\Omega)$. On dit que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ tel que

$$mes(A) \leq \delta \Rightarrow (\forall f \in \mathcal{F}, \quad \int_A f \leq \epsilon).$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si et seulement si

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| \geq M\}} |f| \to 0 \text{ quand } M \to +\infty.$$

2. Montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante telle que $g(t)/t \to +\infty$ et

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_\Omega g(|f(x)|)dx < +\infty.$$

$\star$

Exercice 7. *L^∞ n'est pas séparable*

1. Soit E un espace topologique. On suppose qu'il existe une famille $(0_i)_{i \in I}$ telle que
- pour tour $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de E,
- $O_i \cap O_j = \varnothing$ si $i \neq j$,
- I n'est pas dénombrable.

Montrer que E n'est pas séparable

2. En déduire que L^∞ n'est pas séparable.

$\star$