Analyse fonctionnelle
TD n° 2

Théorème de Hahn-Banach

Séance du 6 février 2017

Exercice 1. *Séparabilité du dual d'un espace normé*

1. Rappeler un critère de densité utile, corollaire du théorème de Hahn-Banach.

2. Soit E un espace vectoriel normé. On suppose que E^* est séparable. Soit $\{\ell_n\}$ une famille dénombrable dense dans E^*. En étudiant une famille $\{x_n\} \in E^{\mathbb{N}}$ de vecteurs non nuls tels que

$$|\ell_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|\ell_n\|\|x_n\|,$$

montrer que E aussi est séparable.

3. En déduire que $\ell^1 \subsetneq (\ell^\infty)^*$, puis construire directement un élément $\varphi \in (\ell^\infty)^*$ ne pouvant s'écrire

$$\varphi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$$

pour un certain $u \in \ell^1$.

Indication : On pourra commencer par construire φ sur un sous-espace, puis utiliser Hahn-Banach.

⋆

Exercice 2. *Applications du critère dual de densité*

1. Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $]-1, 1[$ deux à deux distincts, et tendant vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_k(n) = \alpha_k^n$. Montrer que les suites u_k, pour $k \in \mathbb{N}$, engendrent un sous-espace V dense dans $\ell^p(\mathbb{N})$.

2. Pour $a > 1$, on note f_a l'élément de $\mathcal{C}^0([0, 1])$ défini par $x \mapsto \frac{1}{x-a}$. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant $a_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $a_n \to +\infty$. Montrer que $W = \mathrm{Vect}\{f_{a_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

⋆

Exercice 3. *Hahn-Banach en dimension finie*

1. Soit $d \geq 1$, C un convexe quelconque de $\mathbb{R}^d$, et $x \in \mathbb{R}^d \setminus C$. Montrer qu'il existe une forme linéaire (continue) séparant x et C au sens large.

Indication : On pourra distinguer le cas $x \notin \overline{C}$ et $x \in \overline{C} \setminus C$. Dans le deuxième cas, approcher x par une suite $\{x_n\}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$.

2. Montrer que cela est faux en dimension infinie.

⋆

Exercice 4. *L'application J*

1. Soit E un espace vectoriel normé. Expliquer pourquoi on a :

$$\forall x \in E,\ \exists \ell \in E^*, \|\ell\|_{E^*} = 1 \text{ et } \ell(x) = \|x\|_E.$$

En revanche, construire un espace de Banach E et une forme linéaire $\ell \in E^*$ tels que pour aucun $x \in E$ de norme 1, on n'ait $\ell(x) = \|\ell\|_{E^*}$.

2. Soit :

$$J : \begin{cases} E \longrightarrow E^{**} \\ x \longmapsto \varphi_x : (E^* \ni \ell \mapsto \ell(x)) \,. \end{cases}$$

Montrer que J réalise un isomorphisme isométrique de E sur son image. Montrer que celle-ci est fermée si et seulement si E est un espace de Banach.

3. On suppose que E est un Banach. Montrer que E est réflexif (*i.e.* J est bijective) si et seulement si E^* l'est.

Indication : Si $E \subsetneq E^{**}$, construire une forme linéaire sur E^{**} qui s'annule sur E.

⋆

Exercice 5. *Théorème de Hahn-Banach invariant*

Soit E un espace normé réel, $\mathcal{F}$ une collection d'endomorphismes continus de E *commutant deux à deux*, et $p : E \to \mathbb{R}$ une semi-norme $\mathcal{F}$-invariante. On se donne G un sous-espace de E, stable par tous les éléments de $\mathcal{F}$, et ℓ une forme linéaire sur G, qui est de plus $\mathcal{F}$-invariante, et telle que $\forall x \in G$, $\ell(x) \leq p(x)$. On veut prolonger ℓ à E tout entier, avec les mêmes propriétés.

1. On note $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe du semi-groupe engendré par $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{L}(E)$, *i.e.* l'enveloppe convexe de l'ensemble formé de l'identité et des produits finis d'éléments de $\mathcal{F}$. Pour $x \in E$, on pose

$$q(x) := \inf_{u \in \mathcal{C}} p(u(x)).$$

Montrer qu'on définit bien ainsi une semi-norme, et que de plus $q \leq p$, et $\forall x \in G$, $\ell(x) \leq q(x)$.

2. Appliquer le théorème de Hahn-Banach à ℓ et q, et conclure.

Indication : Pour montrer que le prolongement obtenu est bien $\mathcal{F}$-invariant, on pourra montrer que pour tout $u \in \mathcal{F}$, et tout $x \in E$, $q(x - u(x)) \leq 0$.

⋆