Analyse fonctionnelle
TD n° 2

Semi-normes - Théorème de Hahn-Banach (forme analytique)

Séance du 11 février 2019

Exercice 1. *Échauffement : espace quotient*

Soit E un espace vectoriel topologique séparé, et F un sous-espace vectoriel de E. On rappelle que la topologie quotient sur E/F est la topologie la plus fine parmi celles qui rendent continue la projection canonique $\pi : E \to E/F$ (autrement dit, $V \subset E/F$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(V)$ l'est).

1. Montrer que si U est un ouvert de E, alors $\pi(U)$ est un ouvert de E/F.
2. En déduire que E/F possède une structure d'espace vectoriel topologique.
3. Montrer que E/F est séparé si et seulement si F est fermé.

⋆

Exercice 2. *Espaces localement compacts*

1. Montrer l'équivalence entre les deux définitions suivantes. Un espace topologique est dit *localement compact* s'il est séparé et si :
— tout point admet une base de voisinages compacts ;
— tout point admet un voisinage compact.

2. (Théorème de Riesz) Montrer que tout espace vectoriel topologique localement compact est de dimension finie.

3. Application : montrer qu'un sous-espace vectoriel fermé F de $\mathcal{C}([0,1])$ (muni de la topologie de la convergence uniforme) inclus dans $\mathcal{C}^1([0,1])$ est forcément de dimension finie. On pourra commencer par montrer que $\Phi : f \in F \mapsto f' \in E$ est continue.

⋆

Exercice 3. *L'espace $\mathcal{C}^k(\Omega)$*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On munit $\mathcal{C}^k(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions k-fois différentiables sur Ω dont la différentielle $k^{\text{ème}}$ est continue), des semi-normes $\|\cdot\|_{n,K}$ suivantes : pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq k$ et tout compact $K \subset \Omega$,

$$\|\phi\|_{n,K} := \sum_{|\alpha| \leq n} \|\partial^\alpha \phi\|_{\mathcal{C}^0(K)}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}^k(\Omega)$ muni de la topologie $\mathcal{T}$ induite par ces semi-normes est un espace de Fréchet pour une distance associée d.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ non nulle telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda f, 0) < \varepsilon$.
3. En déduire que $\mathcal{T}$ n'est pas normable.
4. Montrer à l'aide du lemme de Baire que l'espace des fonctions continues à support compact $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$, muni de la topologie induite par les normes $\|\cdot\|_{0,K}$ pour K compact de Ω, est un espace métrisable qui n'est pas complet.

5. Par un exemple, montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, un fermé borné de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ n'est pas nécessairement compact. On pourra commencer par le cas $k = 0$.

6. Montrer en revanche que les compacts de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ sont les fermés bornés.

⋆

Exercice 4. *Autour du théorème de Hahn-Banach analytique*

1. Montrer qu'il existe une forme linéaire L sur l'ensemble des suites réelles bornées ℓ^∞, telle que pour toute telle suite $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, on ait $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq L(a) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

2. Montrer que ℓ^1 est le dual de c_0, l'espace des suites de limite nulle, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Construire un élément $\varphi \in (\ell^\infty)^*$ tel qu'il n'existe pas $u \in \ell^1$ tel que

$$\varphi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n.$$

Indication : On pourra commencer par construire φ sur un sous-espace, puis utiliser le théorème de Hahn-Banach.

⋆

Exercice 5. *Unicité du prolongement dans le théorème de Hahn-Banach*

Soit E un espace vectoriel normé et E^* son dual topologique. Notons S la sphère unité de E^*.

1. On suppose que E^* est strictement convexe, c'est-à-dire :

$$\forall \ell_1, \ell_2 \in S, \quad \ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) \notin S.$$

Soit F un sous-espace de E, ℓ une forme linéaire continue sur F de norme 1. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire $\tilde{\ell}$ sur E, de norme 1, et prolongeant ℓ.

2. On suppose inversement qu'il existe $\ell_1 \neq \ell_2$ deux éléments de S, vérifiant $\frac{\ell_1+\ell_2}{2} \in S$, tels que le noyau de $\ell_1 - \ell_2$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Montrer qu'il existe alors une forme linéaire continue φ définie sur un sous-espace vectoriel F de E, qui admet deux prolongements linéaires continus distincts sur E ayant la même norme que φ.

3. Trouver un exemple de prolongements multiples de même norme, dans ℓ^1 ainsi que dans ℓ^∞, de formes linéaires de norme 1.

⋆

Exercice 6. *Théorème de Hahn-Banach invariant*

Soit E un espace normé réel, $\mathcal{F}$ une collection d'endomorphismes continus de E *commutant deux à deux*, et $p : E \to \mathbb{R}$ une semi-norme $\mathcal{F}$-invariante. On se donne G un sous-espace de E, stable par tous les éléments de $\mathcal{F}$, et ℓ une forme linéaire sur G, qui est de plus $\mathcal{F}$-invariante, et telle que $\forall x \in G$, $\ell(x) \leq p(x)$. On veut prolonger ℓ à E tout entier, avec les mêmes propriétés.

1. On note $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe du semi-groupe engendré par $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{L}(E)$, *i.e.* l'enveloppe convexe de l'ensemble formé de l'identité et des produits finis d'éléments de $\mathcal{F}$. Pour $x \in E$, on pose

$$q(x) := \inf_{u\in\mathcal{C}} p(u(x)).$$

Montrer qu'on définit bien ainsi une semi-norme, que $q \leq p$, et que pour tout x dans G, $\ell(x) \leq q(x)$.

2. Appliquer le théorème de Hahn-Banach à ℓ et q, et conclure.

Indication : Pour montrer que le prolongement obtenu est bien $\mathcal{F}$-invariant, on pourra montrer que pour tout $u \in \mathcal{F}$, et tout $x \in E$, $q(x - u(x)) \leq 0$.

⋆