Analyse fonctionnelle
TD n° 2

Semi-normes - Théorème de Hahn-Banach analytique

Séances des 10 et 11 février 2020

Exercice 1. *Échauffement : espace quotient*

Soit E un espace vectoriel topologique, et F un sous-espace vectoriel de E. On rappelle que la topologie quotient sur E/F est la topologie la plus fine parmi celles qui rendent continue la projection canonique $\pi : E \to E/F$.

1. Montrer que si U est un ouvert de E, alors $\pi(U)$ est un ouvert de E/F.
2. En déduire que E/F possède une structure d'espace vectoriel topologique.
3. Montrer que E/F est séparé si et seulement si F est fermé.

⋆

Exercice 2. *L'espace $C^k(\Omega)$*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On munit $C^k(\Omega)$ (ensemble des fonctions k-fois différentiables avec différentielle $k^{\text{iéme}}$ continue), des semi-normes $\|\cdot\|_{m,K}$ pour tout $m \leq k$ ($m \in \mathbb{N}$ si $k = \infty$) et pour tout compact $K \subset \Omega$, où

$$\|\phi\|_{m,K} = \sum_{\alpha:|\alpha|\leq m} \|D^\alpha \phi\|_{C^0(K)}.$$

1. Montrer que $C^k(\Omega)$ muni de la topologie $\mathcal{T}$ induite par ces semi-normes est un espace de Fréchet.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $f \in C^k(\Omega)$ non nulle telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda f, 0) < \varepsilon$.

3. En déduire que $\mathcal{T}$ n'est pas normable.

4. Montrer à l'aide du lemme de Baire que l'espace des fonctions continues à support compact $C_c^0(\Omega)$, muni de la topologie induite par les normes $\|\cdot\|_{0,K}$ pour K compact de Ω, est un espace métrisable qui n'est pas complet.

5. Par un exemple, montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, un fermé borné de $C^k(\Omega)$ n'est pas nécessairement compact. On pourra commencer par le cas $k = 0$.

6. Montrer en revanche que les compacts de $C^\infty(\Omega)$ sont les fermés bornés.

⋆

Exercice 3. *Espaces localement compacts*

1. Montrer l'équivalence entre les deux définitions suivantes. Un espace topologique est dit localement compact s'il est séparé et si :

— tout point admet une base de voisinages compacts ;

— tout point admet un voisinage compact.

2. Montrer que tout espace vectoriel topologique localement compact est de dimension finie.

3. Application : montrer qu'un sous-espace vectoriel fermé F de $E = \mathcal{C}([0,1])$ (muni de la topologie de la convergence uniforme) inclus dans $\mathcal{C}^1([0,1])$ est forcément de dimension finie. On pourra commencer par montrer que $\Phi : f \in F \mapsto f' \in E$ est continue.

⋆

Exercice 4. *Autour du théorème de Hahn-Banach analytique*

1. Montrer qu'il existe une forme linéaire L sur l'ensemble des suites réelles bornées ℓ^∞, telle que pour toute telle suite $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, on ait $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq L(a) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

2. Montrer que ℓ^1 est le dual de c_0, l'espace des suites de limite nulle, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Construire un élément $\varphi \in (\ell^\infty)^*$ tel qu'il n'existe pas $u \in \ell^1$ tel que

$$\varphi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n.$$

Indication : On pourra commencer par construire φ sur un sous-espace, puis utiliser le théorème de Hahn-Banach.

⋆

Exercice 5. *Limite de Banach*

On considère $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Soit S_g l'opérateur de décalage à gauche : $S_g(u_0, u_1, u_2, \ldots) := (u_1, u_2, \ldots)$. Le but de cet exercice est de démontrer l'existence d'une forme linéaire continue Λ sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$, appelée limite de Banach, qui satisfait les deux conditions suivantes :

$$\Lambda S_g u = \Lambda u$$
$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \Lambda u \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$

En particulier, si u converge, $\Lambda u = \lim u$.

1. Pour $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on définit les formes moyennes suivantes :

$$\Lambda_n(u) = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

Soit $p : u \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mapsto \limsup_{n\to+\infty} \Lambda_n(u)$. Montrer que p est bien définie et satisfait $p(u+v) \leq p(u) + p(v)$ pour tout $u, v \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, et $p(\lambda u) = \lambda p(u)$ pour tout $\lambda \geq 0$.

2. Prouver l'existence de la limite de Banach. On pourra introduire l'espace des suites Cesarò-convergentes.

3. La limite de Banach est-elle unique ?

⋆

Exercice 6. *Théorème de Hahn-Banach invariant*

Soit E un espace normé réel, $\mathcal{F}$ une collection d'endomorphismes continus de E *commutant deux à deux*, et $p : E \to \mathbb{R}$ une semi-norme $\mathcal{F}$-invariante. On se donne G un sous-espace de E, stable par tous les éléments de $\mathcal{F}$, et ℓ une forme linéaire sur G, qui est de plus $\mathcal{F}$-invariante, et telle que $\forall x \in G$, $\ell(x) \leq p(x)$. On veut prolonger ℓ à E tout entier, avec les mêmes propriétés.

1. On note $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe du semi-groupe engendré par $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{L}(E)$, *i.e.* l'enveloppe convexe de l'ensemble formé de l'identité et des produits finis d'éléments de $\mathcal{F}$. Pour $x \in E$, on pose

$$q(x) := \inf_{u \in \mathcal{C}} p(u(x)).$$

Montrer qu'on définit bien ainsi une semi-norme, et que de plus $q \leq p$, et $\forall x \in G$, $\ell(x) \leq q(x)$.

2. Appliquer le théorème de Hahn-Banach à ℓ et q, et conclure.

Indication : Pour montrer que le prolongement obtenu est bien $\mathcal{F}$-invariant, on pourra montrer que pour tout $u \in \mathcal{F}$, et tout $x \in E$, $q(x - u(x)) \leq 0$.

⋆

Exercice 7. *Unicité du prolongement dans le théorème de Hahn-Banach*

Soit E un espace vectoriel normé et E^* son dual topologique. Notons S la sphère unité de E^*.

1. On suppose que E^* est strictement convexe, c'est-à-dire :

$$\forall \ell_1, \ell_2 \in S, \quad \ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) \notin S.$$

Soit F un sous-espace de E, ℓ une forme linéaire continue sur F de norme 1. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire $\tilde{\ell}$ sur E, de norme 1, et prolongeant ℓ.

2. On suppose inversement qu'il existe $\ell_1 \neq \ell_2$ deux éléments de S, vérifiant $\frac{\ell_1+\ell_2}{2} \in S$, tels que le noyau de $\ell_1 - \ell_2$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Montrer qu'il existe alors une forme linéaire continue φ définie sur un sous-espace vectoriel F de E, qui admet deux prolongements linéaires continus distincts sur E ayant la même norme que φ.

3. Trouver un exemple de prolongements multiples de même norme, dans ℓ^1 ainsi que dans ℓ^∞, de formes linéaires de norme 1.

⋆

Exercice 8. *Espaces L^p, $p \in]0,1[$*

Soit $0 < p < 1$. Sur $L^p([0,1]) = \{f \text{ mesurable} \mid \int_0^1 |f|^p < \infty\}$, l'application $f \in L^p([0,1]) \mapsto \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ne définit plus une norme, on introduit donc la distance

$$d(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx.$$

1. Montrer que d définit une distance sur $L^p([0,1])$.

2. Soit V un voisinage ouvert de 0, que l'on suppose convexe. On veut montrer que $V = L^p([0,1])$. Soit donc $f \in L^p([0,1])$, et un entier $n \geq 1$.

(a) Montrer qu'il existe des points $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ tels que :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f|^p = \frac{1}{n} \int |f|^p.$$

(b) On définit $g_i^n(x) := nf(x)\mathbb{1}_{x \in [x_i, x_{i+1}]}$. En utilisant g_i^n, montrer que $f \in V$.

3. En déduire que $L^p([0,1])^* = \{0\}$.

$\star$

Exercice 9. *Espaces ℓ^p, $p \in]0,1[$*

Soit $p < 1$. On s'intéresse à l'espace $\ell^p(\mathbb{N}) = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p < \infty\}$. Pour $p < 1$, l'application $u \in \ell^p(\mathbb{N}) \mapsto \left(\sum |u_n|^p\right)^{1/p} \in \mathbb{R}_+$ ne définit plus une norme. On définit donc une distance d sur $\ell^p(\mathbb{N})$ de la façon suivante : pour $u, v \in \ell^p(\mathbb{N})$,

$$d(u,v) := \sum_n |u_n - v_n|^p.$$

1. Montrer que d munit $\ell^p(\mathbb{N})$ d'une structure d'espace vectoriel métrique complet.

2. Soit $q \in]1 - 1/p, 0[$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on introduit la suite u^k définie par $u^k(n) = \delta_{k,n}(1+k)^q$. On note $K = \{0, u^0, u^1, u^2, \ldots\}$. Montrer que K est compact, mais que son enveloppe convexe n'est pas bornée. Montrer que $(\ell^p(\mathbb{N}), d)$ n'est pas localement convexe (c'est-à-dire qu'il n'admet pas de base de voisinages convexes).

3. Montrer que $(\ell^p(\mathbb{N}))^* = \ell^\infty(\mathbb{N})$.

$\star$