Corrigé – TD 2

Tribus et mesures

Exercice 0. Soit $f: E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ une fonction. Pour tout $n \geq 1$ et tout $i \in \{0, 1, \ldots, n2^n - 1\}$ on note

$$A_n = \{x \in E \colon f(x) \geq n\}, \qquad B_{n,i} = \{x \in E \colon i2^{-n} \leq f(x) < (i+1)2^{-n}\},$$

et pour un entier $n \geq 1$ on pose

$$f_n = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \mathbf{1}_{B_{n,i}} + n\mathbf{1}_{A_n}.$$

Soit $x \in E$ fixé. Que dire de la suite $f_n(x)$ lorsque $n \to \infty$?

Corrigé : La suite $f_n(x)$ tend en croissant vers $f(x)$. En effet, si $x \in B_{n,i}$, on vérifie que

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } \frac{2i}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2i+1}{2^{n+1}} \\ f_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } \frac{2i+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2(i+1)}{2^{n+1}}, \end{cases}$$

et que si $x \in A_n$ alors

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } f(x) \geq n+1 \\ \frac{n2^{n+1}+l}{2^{n+1}} & \text{si } \frac{n2^{n+1}+l}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{n2^{n+1}+l+1}{2^{n+1}} \text{ avec } 0 \leq l \leq 2^{n+1}-1. \end{cases}$$

Il en découle que la suite $f_n(x)$ est croissante.

D'autre part, par construction, si $x \in \{f < n_0\}$ alors $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}$ pour $n \geq n_0$. On en déduit que $f_n(x) \to f(x)$ lorsque $x \in \{f < +\infty\} = \cup_{k \geq 1}\{f < k\}$.

Enfin, si $x \in \{f = +\infty\} = \cap_{k \geq 1}\{f \geq k\}$, alors $f_n(x) = n \to +\infty$.

Remarque. Si $f \leq M$, alors $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}$ pour $n \geq M$ et la convergence est uniforme.

Exercice 1 (Petites questions)**.** 1) Si l'on note λ la mesure de Lebesgue, rappelez pourquoi $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}\right) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \lambda(\{x\}) = \sum_{x \in \mathbb{R}} 0 = 0.$$

Où est le problème ?

2) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux tribus, est-ce que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est toujours une tribu?

3) Si $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont deux suites de nombres réels, a-t-on toujours

$$\limsup_{n \to \infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n \to \infty} a_n + \limsup_{n \to \infty} b_n?$$

Et si les deux suites sont bornées? Et si b_n converge ?

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

Corrigé : 1) On a $\lambda(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda([x-1/n, x+1/n]) = 0$. Par ailleurs l'égalité $\lambda\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}\right) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \lambda\left(\{x\}\right)$ n'est pas vérifiée car $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

2) Non, pas toujours. Par exemple si, en notant $E = \{1, 2, 3\}$, on prend $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, E\}$ et $\mathcal{G} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, E\}$, on a alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, E\}$, qui n'est pas stable par union ($\{1\} \cup \{2\} \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$).

3) Ce n'est pas toujours vrai (prendre par exemple $a_n = -b_n = n$). En revanche, le terme de gauche est inférieur ou égal au terme de droite lorsque les deux suites sont bornées, et l'égalité est vérifiée lorsque b_n converge.

Exercice 2 (Lemme de Borel–Cantelli)**.** Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré (μ est une mesure positive), et soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathscr{E}$. On rappelle que l'on note

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k, \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k.$$

1. Montrer que
$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)\ ,$$
et que si $\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) < \infty$, alors
$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)\ .$$

2. (Lemme de Borel–Cantelli.) On suppose que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que
$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

3. (Une application du lemme de Borel–Cantelli.) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0, 1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q avec p et q premiers entre eux tels que
$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$
$i.e.$ presque tout x est "mal approchable par des rationnels à l'ordre $2 + \varepsilon$".

Corrigé :

1. On remarque que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \geq n$,
$$\mu\left(\bigcap_{p\geq n} A_p\right) \leq \mu(A_k).$$
Ainsi,
$$\mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq \inf_{k\geq n} \mu(A_k). \tag{1}$$

Or la suite $(\cap_{k\geq n} A_k)_{n\geq 1}$ est croissante. Le résultat s'obtient donc en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (1). De même, on a

$$\mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \geq \sup_{k\geq n} \mu(A_k). \tag{2}$$

Or la suite $(\cup_{k\geq n} A_k)_{n\geq 1}$ est décroissante et $\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) < +\infty$. Le résultat s'obtient donc en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (2). On peut aussi utiliser le résultat précédent et raisonner en passant au complémentaire. En effet, posons $F = \cup_{n\geq 1} A_n$. On a alors

$$F \setminus \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} (F \setminus A_n).$$

Donc,

$$\mu\left(F \setminus \limsup_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(F \setminus A_n),$$

c'est-à-dire,

$$\mu(F) - \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \leq \mu(F) - \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Comme $\mu(F) < \infty$, cela implique le résultat.

2. On a, pour tout $n \geq 1$,

$$\mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n} \mu(A_k).$$

Or $\mu(\limsup_{k\to\infty} A_k) \leq \mu\left(\cup_{k\geq n} A_k\right)$ pour tout $n \geq 1$ et $\sum_{k\geq n} \mu(A_k)$ est le reste d'une série convergente et donc tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On obtient ainsi le résultat.

3. Pour tout $q \geq 1$, on note

$$A_q = [0,1] \cap \bigcup_{p=0}^{q} \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}\right].$$

Ainsi, $\lambda(A_q) \leq 2/q^{1+\varepsilon}$. Par conséquent,

$$\sum_{q\geq 1} \lambda(A_q) < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel–Cantelli, $\lambda(\limsup_{q\to\infty} A_q) = 0$, or l'ensemble $\limsup A_q$ contient l'ensemble des réels bien approchables par des rationnels à l'ordre $2 + \varepsilon$. Voir

`http://en.wikipedia.org/wiki/Thue-Siegel-Roth_theorem`

Exercice 3 (Mesure sur $\mathbb{Z}$)**.** Existe-t-il une mesure de masse finie sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation ?

Corrigé : Oui, mais seulement la mesure nulle. En effet, soit μ une mesure non nulle de masse finie sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation. Comme μ est non nulle et $\mathbb{Z}$ est dénombrable, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $c := \mu(\{n\}) > 0$. Par invariance par translation, il vient $\mu(\{k\}) = c$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Mais alors, :

$$\mu(\mathbb{Z}) = \mu(\cup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(\{k\}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c = \infty,$$

ce qui contredit le fait que μ est de masse finie.

Exercice 4 (Opérations sur les tribus)**.**

1. Soit $(X \times Y, \mathcal{F})$ un espace-produit mesuré et $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ la projection canonique. L'ensemble $\mathcal{F}_X := \{\pi(F), F \in \mathcal{F}\}$ est-il une tribu ?
2. On considère sur $\mathbb{N}$, pour chaque $n \geq 0$, la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\})$. Montrer que la suite de tribus $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ est croissante mais que $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

   Indication: On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le sous-ensemble $2\mathbb{N}$.
3. (Partiel 2010) Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable. Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de E, et soit $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Alexandra dit: alors nécessairement, il existe une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(\mathcal{D})$. A-t-elle raison?

Corrigé :

1. On considère pour $X = Y = \{0, 1\}$ la tribu $\mathcal{F}$ engendré par l'élément $(0, 0) \in X \times Y$. Il est clair que
$$\mathcal{F} = \{\varnothing, X \times Y, \{(0, 0)\}, X \times Y \backslash \{(0, 0)\}\}.$$
   On vérifie que $\mathcal{F}_X = \{\varnothing, \{0\}, X\}$, ce qui n'est pas une tribu.
2. Posons
$$\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n,$$
   et supposons que $\mathcal{F}$ soit une tribu. On a
$$\{2n\} \in \mathcal{F}_{2n} \subset \mathcal{F} \quad \text{et} \quad 2\mathbb{N} = \bigcup_{n\geq 0} \{2n\}.$$
   Ainsi, $2\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ *i.e.* il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2\mathbb{N} \in \mathcal{F}_{n_0}$. Or, les seuls éléments de cardinal infini de $\mathcal{F}_{n_0}$ sont de la forme $\mathbb{N} \setminus A$, où A est une partie de $\{0, 1, \dots, n_0\}$. On obtient donc une contradiction.
3. Alexandra a raison. En effet, soit
$$\mathcal{G} = \{B \in \sigma(\mathcal{C})\,;\, \exists \mathcal{D} \subset \mathcal{C} \text{ dénombrable tel que } B \in \sigma(\mathcal{D})\}.$$
   Montrons que $\mathcal{G}$ est une tribu. Il est clair que $E \in \mathcal{G}$. Si $A \in \mathcal{G}$, alors il existe $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ dénombrable tel que $A \in \sigma(\mathcal{D})$, et donc $A^c \in \sigma(\mathcal{D})$: on a $A^c \in \mathcal{G}$. Si $(A_n) \subset \mathcal{G}$, alors pour tout n il existe $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{C}$ dénombrable tel que $A_n \in \sigma(\mathcal{D}_n)$, et donc $\cup_n A_n \in \sigma(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D} := \cup_n D_n \subset \mathcal{C}$ est dénombrable (étant une union dénombrable d'ensembles dénombrables): on a $\cup_n A_n \in \mathcal{G}$. En conclusion, $\mathcal{G}$ est une tribu.

   Or $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, ce qui implique que $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{C})$, d'où le résultat.

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) = 1$. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ deux sous-ensembles de $\mathcal{P}(\Omega)$ constitués d'ensembles mesurables. On suppose que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont stables par intersections finies et que pour tous $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$. Montrer que pour tous $U \in \sigma(\mathcal{A})$ et $V \in \sigma(\mathcal{B})$ on a $\mu(U \cap V) = \mu(U)\mu(V)$.

Corrigé : D'abord, on introduit

$$\mathcal{G}_1 := \{U \in \mathcal{F};\ \forall B \in \mathcal{B}, \mu(U \cap B) = \mu(U)\mu(B)\}.$$

$\mathcal{G}_1$ est une classe monotone contenant $\mathcal{A}$, qui est stable par intersections finies. Donc, d'après le théorème de la classe monotone, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{G}_1$.

Ensuite, on considère

$$\mathcal{G}_2 := \{V \in \mathcal{F};\ \forall U \in \sigma(\mathcal{A}), \mu(U \cap V) = \mu(U)\mu(V)\}.$$

$\mathcal{G}_2$ est une classe monotone contenant $\mathcal{B}$ (d'après la première étape), qui est stable par intersections finies. Donc, d'après le théorème de la classe monotone, $\sigma(B) \subset \mathcal{G}_2$, ce qui conclut.

Exercice 6 (Atomes des mesures positives)**.** Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $\{x\} \in \mathscr{E}$ pour tout $x \in E$. On suppose également que μ est une somme de mesures finies. Notons $A_\mu := \{x \in E : \mu(\{x\}) > 0\}$ l'ensemble de ses atomes. Si $A_\mu = \varnothing$, la mesure μ est dite diffuse. Elle est dite purement atomique s'il existe $N \in \mathscr{E}$ tel que $E \backslash A_\mu \subset N$ et $\mu(N) = 0$.

1. Montrer que l'ensemble A_μ est dénombrable.
2. Montrer qu'il existe un unique couple de mesures (μ_d, μ_a) sur $\mathscr{E}$ avec μ_d diffuse et μ_a purement atomique tel que $\mu = \mu_d + \mu_a$.

Corrigé :

1. On suppose d'abord que μ est finie. On pose $B_k = \{x \in E \colon \mu(\{x\}) \geq 1/k\}$. Si $x_1, \ldots, x_p \in B_k$ sont distincts, alors
$$p/k \leq \mu(\{x_1\}) + \cdots + \mu(\{x_p\}) = \mu(\{x_1, \ldots, x_p\}) \leq \mu(E).$$
On voit donc que B_k est un ensemble fini qui a moins de $k\mu(E)$ éléments. Par ailleurs, on remarque que $A_\mu = \cup_{k \geq 1} B_k$, donc A_μ est dénombrable.
On suppose maintenant qu'il existe des mesures positives finies $\mu_p, p \in \mathbb{N}$ telles que $\mu = \sum_{p \in \mathbb{N}} \mu_p$. Il est clair que $A_\mu = \cup_{p \in \mathbb{N}} A_{\mu_p}$, ce qui entraîne que A_μ est dénombrable.
2. On pose
$$\mu_d = \mu(\cdot \cap (E \backslash A_\mu)) \qquad \text{et} \qquad \mu_a = \sum_{x \in A_\mu} \mu(\{x\})\delta_x\,.$$
Il est clair que $\mu = \mu_d + \mu_a$ avec μ_d diffuse et μ_a purement atomique. Si de plus $\mu = \nu_1 + \nu_2$ avec ν_1 diffuse et ν_2 purement atomique, pour tout $x \in E$ on a $\mu(\{x\}) = \nu_2(\{x\})$. Alors $A_\mu = A_{\nu_2}$ qui est donc dénombrable et dans $\mathscr{E}$. Comme ν_2 est purement atomique, pour tout $B \in \mathscr{E}$, on a
$$\nu_2(B) = \nu_2(B \cap A_\mu) = \sum_{x \in B \cap A_\mu} \mu(\{x\}) = \mu_a(B).$$
Donc $\nu_2 = \mu_a$. On constate aussi que pout tout $B \in \mathscr{E}$, $\mu(B \cap (E \backslash A_\mu)) = \nu_1(B \cap (E \backslash A_\mu)) = \nu_1(B)$ car A_μ est dénombrable et ν_1 diffuse.

Exercice 7 ("Cardinal" d'une tribu)**.** Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu $\mathscr{E}$ infinie dénombrable. Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable. Pour tout $x \in E$, on définit l'atome de la tribu $\mathscr{E}$ engendré par x par

$$\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathscr{E}\,:\, x \in A\}} A.$$

1. Montrer que les atomes de $\mathscr{E}$ forment une partition de E.
2. Montrer que si $\mathscr{E}$ est au plus dénombrable alors $\mathscr{E}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathscr{E}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
3. Conclure.
4. Donner une nouvelle démonstration de question 2 de l'exercice 4.

Corrigé :

1. On remarque que $x \in \dot{x}$ pour tout $x \in E$, donc
$$\bigcup_{x \in E} \dot{x} = E.$$
Montrons maintenant que
$$\dot{x} \cap \dot{y} \neq \emptyset \ \ \Rightarrow \ \ \dot{x} = \dot{y}.$$
Soient $x, y, z \in E$ tels que $z \in \dot{x} \cap \dot{y}$. Alors chaque ensemble $A \in \mathscr{E}$ contenant x contient z. Supposons qu'il existe $B \in \mathscr{E}$ contenant z mais ne contenant pas x. Alors $B^c \in \mathscr{E}$ et contient x. Ainsi B^c contient z ce qui est contradictoire. Donc $\dot{x} = \dot{z}$ et de même $\dot{y} = \dot{z}$. Donc $\dot{x} = \dot{y}$.

2. Supposons que $\mathscr{E}$ soit finie ou dénombrable. Alors chaque atome $\dot{x}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'éléments de $\mathscr{E}$ et donc appartient à $\mathscr{E}$. De plus, si $A \in \mathscr{E}$, alors
$$A = \bigcup_{x : x \in A} \dot{x}$$
et cette réunion est au plus dénombrable car les atomes appartiennent à $\mathscr{E}$. De plus, les atomes formant une partition de E, cette écriture est unique.

3. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des atomes de $\mathscr{E}$ supposée finie ou dénombrable. D'après la question 2., on définit une bijection φ de $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ dans $\mathscr{E}$ par,
$$\varphi : A \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \longmapsto \bigcup_{\dot{x} \in A} \dot{x}.$$
Si $\mathcal{A}$ est fini, alors $\mathscr{E}$ est finie. Sinon, $\mathscr{E}$ ne peut pas être dénombrable.

4. Les tribus $\mathcal{F}_n$ sont toutes finies donc $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ est infinie dénombrable. D'après la question précédente, il n'existe pas de tribu infinie dénombrable, donc $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 8 (Support)**.** Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement sur un espace métrique séparable localement compact). On pose

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n ; \mu(\mathrm{B}(x,r)) > 0, \text{ pour tout } r > 0\}.$$

Montrer que S est fermé, que $\mu(\mathbb{R}^n \backslash S) = 0$, et que $\mu(S \backslash F) = \mu(\mathbb{R}^n \backslash F) > 0$ pour tout fermé F strictement contenu dans S. (On appelle S le support de la mesure μ.)

Corrigé : Soit $x \notin S$, alors par définition il existe un $r_x > 0$ tel que $\mu(B(x, r_x)) = 0$, *a fortiori* pour tout z contenu dans la boule ouverte de centre x et de rayon r_x

$$B(z, r_x - |z - x|) \subset B(x, r_x) \text{ et donc } \mu(B(z, r_x - |z - x|)) = 0,$$

ce qui démontre que $B(x, r_x)$ est incluse dans S^c. L'ensemble S est donc fermé.

On sait que pour tout $x \notin S$, il existe $r_x > 0$ tel que $\mu(B(x, r_x)) = 0$. Si K est un compact inclu dans S^c il existe un recouvrement ouvert

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x),$$

duquel on peut extraire un recouvrement fini (Borel–Lebesgue). De plus S^c peut être vu comme une réunion dénombrable de compacts, par exemple

$$S^c = \bigcup_{n,k} \left\{ x : d(x, S) \geq \frac{1}{k}, |x| \leq n \right\},$$

ainsi S^c est une union dénombrable de boules ouvertes $S^c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, r_{x_i})$ et

$$\mu(S^c) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B(x_i, r_{x_i})) = \sum 0 = 0.$$

Si F est un fermé contenu dans S alors

$$\mathbb{R}^n \backslash F = \mathbb{R}^n \backslash S \sqcup S \backslash F,$$

et chacun de ces ensembles est mesurable, le résultat s'obtient en prenant la mesure de l'égalité.

Exercice 9 ($\star$ – Mesure non-atomique)**.** Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré. Un ensemble $A \in \mathscr{E}$ est un atome pour μ si $0 < \mu(A) < \infty$ et pour tout $B \subset A$ mesurable, $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$. Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) = 1$ et tel que μ n'ait pas d'atomes. Montrer que l'image de μ est $[0, 1]$ (c'est-à-dire que pour tout $t \in [0, 1]$, il existe $A \in \mathscr{E}$ tel que $\mu(A) = t$).

Corrigé : Il s'agit d'un très bel exercice à zornette, voir

`http://en.wikipedia.org/wiki/Atom_(measure_theory)#Non-atomic_measures`