PROCESSUS STOCHASTIQUE - TD 2
ESPÉRANCE CONDITIONNELLE - LOI CONDITIONNELLE

Exercice 1.
Soit X une v.a. $\mathbb{L}^1$ de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soit Y une v.a. $\mathcal{G}$ mesurable, on veut montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Y$. Montrer que si Π est un ensemble de parties de Ω qui contient Ω stable par intersections finies, dont la tribu engendrée est $\mathcal{G}$, il suffit de montrer que

$$\forall \pi \in \Pi \ , \ \mathbb{E}[X \mathbb{1}_\pi] = \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_\pi].$$

Correction : Vous l'avez deviné, cela se démontre avec les classes monotones. Soit

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{G}, \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_A].\}$$

Je vous laisse démontrer que $\mathcal{C}$ est une classe monotone qui contient Π, donc $cc = \mathcal{G}$. Donc pour tout événement A $\mathcal{G}$-mesurable,

$$\mathbb{E}[Y \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \mathbb{1}_A\right],$$

et en prenant $A = \{Y > \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\}$ on voit que $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ p.s.

Exercice 2 (Un peu de conditionnement discret)**.**

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, soit $(A_1, \dots, A_n)$ une partition de Ω formée d'ensembles mesurables vérifiant $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que pour tout événement $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, on a
$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}.$$

2. On considère à présent N boîtes, et on suppose que la i-ème boîte contient r_i boules rouges et n_i boules noires. On tire une boîte au hasard uniformément, puis on tire une boule uniformément dans la boîte choisie. Calculer la probabilité qu'on ait choisi la i-ième boîte sachant qu'on a tiré une boule rouge.

3. Soient X et Y deux lancers de dés indépendants, $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$. Calculer la distribution conditionnelle de X sachant V, de U sachant V, de V sachant X.

4. Soit X un entier choisi uniformément sur $\{1, \dots, n\}$ et Y un réel choisi uniformément sur le segment $[0, x]$. Calculer la distribution conditionnelle de X sachant Y.

5. Soit N le nombre de particules émises par un échantillon de matériel radioactif, distribué selon une loi de Poisson de paramètre a. Chaque particule a une probabilité $p \in (0, 1)$ d'être détectée, indépendamment de toutes les autres. Soit Y le nombre de particules détectées. Calculer la loi conditionnelle de Y sachant N, la loi de Y et la loi conditionnelle de N sachant Y.

Correction :

1. On utilise simplement la formule suivante :

$$\mathbb{P}[A_i \text{ et } B] = \mathbb{P}[A_i|B]\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B|A_i]\mathbb{P}[A_i].$$

$$\mathbb{P}[A_i|B] = \frac{\mathbb{P}[A_i \text{ et } B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[B|A_i]\mathbb{P}[A_i]}{\sum_j \mathbb{P}[A_j \text{ et } B]} = \frac{\mathbb{P}[B|A_i]\mathbb{P}[A_i]}{\sum_j \mathbb{P}[B|A_j]\mathbb{P}[A_j]}$$

2. On utilise la formule précédente avec $A_i := \{\text{on choisit la } i\text{-ème boîte}\}$ et $B := \{\text{on tire une boule rouge}\}$.

$$\mathbb{P}[A_i|B] = \frac{\mathbb{P}[B|A_i]\mathbb{P}[A_i]}{\sum_j \mathbb{P}[B|A_j]\mathbb{P}[A_j]} = \frac{r_i}{r_i + n_i}\left(\sum_j \frac{r_j}{r_j + n_j}\right)^{-1}.$$

3. Il suffit d'énumérer tous les cas possibles : par exemple, l'évènement $\{V = 3\}$ correspond à l'évènement $\{(X, Y) \in \{(1, 3); (2, 3); (3, 3); (3, 2); (3, 1)\}\}$ et donc $P[X = 1|V = 3] = 1/5$. Je vous laisse faire le reste.

4. Tout d'abord, il faut remarquer que la partie fractionnaire de Y n'a pas d'importance : soit $[Y]$ une v.a. choisie uniformément parmi les entiers $\{0, 1, \ldots, X - 1\}$ et $\{Y\}$ une v.a. uniforme sur $[0, 1]$ et indépendante de X et $[Y]$, alors $Y = [Y] + \{Y\}$ est bien une v.a. dont la loi sachant X est uniforme sur le segment $[0, X]$. Utilisons la formule du 1., soit $i < k \leq n$:

$$\mathbb{P}[X = k|[Y] = i] = \frac{\mathbb{P}[[Y] = i|X = k]\mathbb{P}[X = k]}{\sum_{l>i} \mathbb{P}[[Y] = i|X = l]\mathbb{P}[X = l]} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \ldots + \frac{1}{n}}.$$

5. La loi de Y sachant N est une somme de N Bernoulli de paramètre p, c'est-à-dire une Binomiale de paramêtres (N, p) :

$$\mathbb{P}[Y = k|N = n] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y = k] &= \sum_{n \geq k} \mathbb{P}[Y = k|N = n]\mathbb{P}[N = n] \\
&= \sum_{n \geq k} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1 - p)^{n-k} \frac{a^n}{n!} e^{-a} \\
&= \frac{(pa)^k}{k!} e^{-a} \sum_{n \geq k} \frac{((1 - p)a)^{n-k}}{(n - k)!} \\
&= \frac{(pa)^k}{k!} e^{-pa}.
\end{aligned}$$

Donc Y est une v.a. de Poisson de paramêtre pa. Maintenant calculons la loi de N sachant Y :

$$\mathbb{P}[N = n|Y = k] = \frac{\mathbb{P}(Y = k|N = n)\mathbb{P}[N = n]}{\mathbb{P}[Y = k]} = \frac{((1 - p)a)^{n-k}}{(n - k)!} e^{-(1-p)a}.$$

Exercice 3.
Soit (X,Y) un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$C = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{array} \right].$$

1. Vérifier que la matrice est bien une matrice de covariance.
2. Déterminer $\mathbb{E}[X|Y]$.
3. Déterminer la loi de X conditionnellement à Y.

Correction :

1. Il faut vérifier que cette matrice est définie positive : le déterminant et la trace sont tous les deux positifs, donc le produit et la somme des deux valeurs propres sont positifs, tout est positif.
2. On sait que si (U,V) est un vecteur gaussien, U et V sont indépendantes ssi $\mathbb{E}[UV] = 0$. Ici $\mathbb{E}[XY] = 1 > 0$, ils ne sont pas indépendants ; par contre intéressons-nous à $(X - Y/3)$:
$$\mathbb{E}\left[\left(X - \frac{Y}{3}\right)Y\right] = \mathbb{E}[XY] - frac13\mathbb{E}[Y^2] = 0.$$
Donc $X = Y/3 + (X - Y/3)$, où $Y/3$ est une fonction de Y et $X - Y/3$ est indépendant de Y, donc $\mathbb{E}[X|Y] = Y/3$.
3. Continuons avec les résultats de la question précédente : $X - Y/3$ est une gaussienne dont la variance est 5/3 (je vous laisse vérifier le calcul) indépendante de Y. La distribution de X sachant Y est une gaussienne de variance $5/3$ centrée en $Y/3$.

Exercice 4.
Soit Y une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}+$ de densité par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^2 y e^{-\lambda y}$. Soit X une variable aléatoire dont la loi conditionnelle sachant Y est la loi uniforme sur $[0,Y]$. Montrer que X et $Y - X$ sont deux variables aléatoires indépendantes et déterminer leurs lois respectives.

Correction : Notons $Z = Y - X$, nous allons calculer la loi du couple (X,Z) : Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(X,Z)] &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{y}\int_0^y h(x,y-x)dx\right)\lambda^2 y e^{-\lambda y} dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^y h(x,y-x)\frac{1}{y}\lambda^2 y e^{-\lambda y} dx dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty h(x,z)\lambda^2 e^{-\lambda(x+z)} dx dz
\end{aligned}$$

Ou la dernière ligne est obtenue en faisant le changement de variable $(x,z) = (x, y-x)$ (je vous laisse vérifier que le jacobien est bien 1). Donc la loi du couple (X,Z) a pour densité sur $\mathbb{R}_+^2$ $\lambda^2 e^{-\lambda(x+z)} = \lambda e^{-\lambda x} \times \lambda e^{-\lambda z}$. Les variables aléatoires X et Z sont bien indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 5.
Soient X une v.a. réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{G} \vee \mathcal{H} = \mathcal{F}$. Le jeune Igor affirme que si on connaît $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$, alors on peut déterminer X. Qu'en pensez-vous ?

Correction : Igor a tort : prenez X et Y deux variables aléatoires uniformes sur $[0, 2\pi]$ et $\mathcal{F} = \sigma(X, Y)$. Prenez $Z = \cos(X + Y)$. Il est facile de vérifier que $\mathbb{E}[Z|X] = \mathbb{E}[Z|Y] = 0$, mais $Z \neq 0$.

Exercice 6.

1. Soit B un espace de Banach et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}, T_\infty$ une famille d'opérateurs de B (endomorphismes continus) bornés pour la norme d'opérateur. On suppose qu'il existe D dense dans B tel que pour tous $x \in D$,
$$T_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T_\infty(x).$$
Montrer que cette convergence a lieu pour tout x.

2. Pour le reste de l'exercice, on se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $p \in [1, \infty)$. Soit $\Pi \subseteq \mathcal{F}$ contenant Ω, stable par intersections finies et dont la tribu engendrée est $\mathcal{F}$. Montrer que Vect$(\mathbb{1}_\pi, \pi \in \Pi)$ est dense dans $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

3. Soit $\mathcal{F}_n$ une filtration, c-à-d une suite croissante de sous-tribus, et $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_n)$. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{L}^p$,
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty].$$

4. Soit $\mathcal{G}_n$ une famille indépendante de sous-tribus. On définit pour tout n la tribu $\mathcal{A}_n$, appelée tribu de l'avenir au temps n, comme la tribu engendrée par les $\mathcal{F}_k$ pour $k \geq n$. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{L}^p$,
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X].$$

Correction :

1. Notons $M = \sup \|T_n\|$. Soit $x \in B$, $\varepsilon > 0$ et $y \in D$ tel que $|x - y| < \frac{\varepsilon}{M}$. Par hypothèse $T_n(y) \to T_\infty(y)$, soit N tel que $\forall n \geq N$, $|T_n(y) - T_\infty(y)| < \varepsilon$. Il est facile devérifier par l'inégalité triangulaire que $\forall n \geq N$, $|T_n(y) - T_\infty(y)| < 3\varepsilon$.

2. On sait que les fonctions étagées sont denses dans $\mathbb{L}^p$, il suffit donc de montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{1}_A$ est dans l'adhérence de Vect$(\mathbb{1}_\pi, \pi \in \Pi)$. Je vous laisse démontrer que les parties A qui ont cette propriété forment une classe monotone, et comme Π est stable par intersections finies et sa tribu engendrée est $\mathcal{F}$, ça marche.

3. Pour tout $X \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty]|\mathcal{F}_n\right].$$
Il suffit donc de prouver que si X est $\mathbb{L}^p$ et $\mathcal{F}_\infty$-mesurable, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \to X$. Nous allons utiliser 1. : $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est bien un Banach, $X \mapsto \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ est un opérateur de norme 1, il nous manque juste un ensemble dense. Pour cela on utilise le 2. : on choisit $\Pi = \bigcup \mathcal{F}_n$, si $\pi \in \Pi$, alors $\mathbb{E}[\mathbb{1}_\pi|\mathcal{F}_n] = \mathbb{1}_\pi$ à partir d'un certain rang.

4. Ceci se fait de la même manière que la question précédente.