PROCESSUS STOCHASTIQUE - TD 2
ESPÉRANCE CONDITIONNELLE - LOI CONDITIONNELLE

Exercice 1.
Soit X une v.a. $\mathbb{L}^1$ sur $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soit Y une v.a. $\mathcal{G}$ mesurable, on veut montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Y$. Montrer que si Π est un ensemble de parties de Ω qui contient Ω, stable par intersections finies, dont la tribu engendrée est $\mathcal{G}$, il suffit de montrer que

$$\forall \pi \in \Pi \ , \ \mathbb{E}[X\mathbb{1}_\pi] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_\pi].$$

Exercice 2 (Un peu de conditionnement discret)**.**

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, soit $(A_1, \dots, A_n)$ une partition de Ω formée d'ensembles mesurables vérifiant $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que pour tout événement $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, on a
$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}.$$
2. On considère à présent N boîtes, et on suppose que la i-ème boîte contient r_i boules rouges et n_i boules noires. On tire une boîte au hasard uniformément, puis on tire une boule uniformément dans la boîte choisie. Calculer la probabilité qu'on ait choisi la i-ième boîte sachant qu'on a tiré une boule rouge.
3. Soient X et Y deux lancers de dés indépendants, $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$. Calculer la distribution conditionnelle de X sachant V, de U sachant V, de V sachant X.
4. Soit X un entier choisi uniformément sur $\{1, \dots, n\}$ et Y un réel choisi uniformément sur le segment $[0, x]$. Calculer la distribution conditionnelle de X sachant Y.
5. Soit N le nombre de particules émises par un échantillon de matériel radioactif, distribué selon une loi de Poisson de paramètre a. Chaque particule a une probabilité $p \in (0, 1)$ d'être détectée, indépendamment de toutes les autres. Soit Y le nombre de particules détectées. Calculer la loi conditionnelle de Y sachant N, la loi de Y et la loi conditionnelle de N sachant Y.

Exercice 3.
Soit (X, Y) un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que la matrice est bien une matrice de covariance.
2. Déterminer $\mathbb{E}[X|Y]$.
3. Déterminer la loi de X conditionnellement à Y.

Exercice 4.
Soit Y une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}+$ de densité par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^2 y e^{-\lambda y}$. Soit X une variable aléatoire dont la loi conditionnelle sachant Y est la loi uniforme sur $[0, Y]$. Montrer que X et $Y - X$ sont deux variables aléatoires indépendantes et déterminer leurs lois respectives.

Exercice 5.
Soient X une v.a. réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{G} \vee \mathcal{H} = \mathcal{F}$. Le jeune Igor affirme que si on connaît $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$, alors on peut déterminer X. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 6.

1. Soit B un espace de Banach et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}, T_\infty$ une famille d'opérateurs de B (endomorphismes continus) bornés pour la norme d'opérateur. On suppose qu'il existe D dense dans B tel que pour tous $x \in D$,
$$T_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T_\infty(x).$$
Montrer que cette convergence a lieu pour tout x.

2. Pour le reste de l'exercice, on se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $p \in [1, \infty)$. Soit $\Pi \subseteq \mathcal{F}$ contenant Ω, stable par intersections finies et dont la tribu engendrée est $\mathcal{F}$. Montrer que Vect$(\mathbb{1}_\pi, \pi \in \Pi)$ est dense dans $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

3. Soit $\mathcal{F}_n$ une filtration, c-à-d une suite croissante de sous-tribus, et $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_n)$. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{L}^p$,
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty].$$

4. Soit $\mathcal{G}_n$ une famille indépendante de sous-tribus. On définit pour tout n la tribu $\mathcal{A}_n$, appelée tribu de l'avenir au temps n, comme la tribu engendrée par les $\mathcal{F}_k$ pour $k \geq n$. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{L}^p$,
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X].$$