2 Processus de Siméon Denis Poisson $(1781 - 1840)$

Pour $\lambda > 0$, on note $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{E}(\lambda)$ des lois de Poisson et exponentielle de paramètres λ.

Exercice 2.1 (Sans Calcul). Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Correction : On a

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(P_1 + \ldots + P_n \leq n),$$

où $P_1, \ldots, P_n$ sont des variables aléatoires de Poisson de paramètre 1 indépendantes. Et

$$\mathbb{P}(P_1 + \ldots + P_n \leq n) = \mathbb{P}\left(\frac{P_1 + \ldots + P_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right).$$

- La variance d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ étant égale à λ, on a d'après le TCL,

$$\frac{P_1 + \ldots + P_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} N,$$

où N est une variable gaussienne (centrée réduite). Or la fonction de répartition de N est continue donc

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(N \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

Correction des exercices suivants : Voir http://www.unige.ch/math/folks/velenik/Cours/2011-2012/ProbaStat/probastat.pdf

Exercice 2.2 (Somme de PP)**.** Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(M_t)_{t\geq 0}$ deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $\lambda, \mu > 0$. Montrer que $(N_t + M_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda + \mu > 0$.

Exercice 2.3 (Épamprage[1] de PP)**.** Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. Indépendamment de $(N_t)_{t\geq 0}$, on se donne une suite $\xi_1, \xi_2, \ldots$ i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre $p > 0$ *i.e.* $P(\xi_1 = 1) = 1 - P(\xi_1 = 0) = p$. Montrer que

$$t \quad \longmapsto \quad \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i,$$

est un processus de Poisson d'intensité $p\lambda$.

Exercice 2.4. Soit $U_1, U_2, \ldots, U_n$ des variables i.i.d. uniformes sur $[0,1]$.

1. Montrer que $n \min_{1\leq i\leq n} U_i$ converge en loi vers $\mathscr{E}(1)$.
2. Montrer que $n^2 \min_{i,j} |U_i - U_j|$ converge en loi (et déterminer sa limite).

Exercice 2.5 (Paradoxe de l'autobus)**.** Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson standard (d'intensité 1). On note $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ les sauts du processus. Pour $t \geq 0$ on pose

$$Z_t = t - T_{N_t} \quad \text{et} \quad W_t = T_{N_t+1} - t.$$

1. Calculer la loi du couple (Z_t, W_t). En particulier montrer que
   (a) les variables Z_t et W_t sont indépendantes,
   (b) la variable W_t suit une loi $\mathscr{E}(1)$,
   (c) on a $Z_t = \min(t, \mathscr{E}(1))$ en loi.
2. Montrer que Z_t converge en loi vers une variable exponentielle de paramètre 1.
3. Calculer $\lim_{t\to\infty} E[W_t + Z_t]$. Interpréter.

Exercice 2.6. Un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ d'intensité λ vérifie les trois propriétés suivantes :

- C'est un processus de comptage, *i.e.* part de 0, est croissant et ne fait que des sauts de taille 1 en restant continu à droite,
- à accroissements stationnaires de loi $\mathscr{P}(\lambda)$, *i.e.* pour tout $t, s \geq 0$ on a $N_{t+s} - N_t = N_s = \mathscr{P}(\lambda)$ en loi,
- et à accroissements indépendants, *i.e.* pour tout $t, s \geq 0$ la variable $N_{t+s} - N_t$ est indépendante de $(N_u)_{u\leq t}$.

1. Montrer que réciproquement, un processus qui vérifie les trois propriétés ci-dessus est un processus de Poisson d'intensité λ.
2. $(*)$ Montrer que tout processus de comptage à accroissements indépendants stationnaires (pas forcément poissoniens !) est en réalité un processus de Poisson.

[1] L'épamprage est une opération horticole consistant à débarrasser un cep de vigne des pampres afin de favoriser la maturation des branches fruitières porteuses de raisin. (Wikipédia)