TD2 : Généralités sur les anneaux et les modules

Diego Izquierdo

Les exercices 1, 3 et 4 sont à préparer. Pendant la séance, nous traiterons les exercices dans l'ordre suivant : 1, 3, 4, 6, 7, 8.

Exercice 1 (à préparer) : Radical d'un idéal (ex. 15 du TD1)
Soient A un anneau et I un idéal de A. On appelle radical de I l'ensemble $\sqrt{I} = \{a \in A | \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I\}$.

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal.
2. Reconnaître $\sqrt{A}$ et $\sqrt{(0)}$.
3. Soit J un idéal de A. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Corriger celles qui sont fausses.
(a) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
(b) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
(c) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I} \cdot \sqrt{J}$.
(d) $\sqrt{I + J} = \sqrt{I} + \sqrt{J}$.
4. Montrer que $\sqrt{I}$ est l'intersection des idéaux premiers contenant I. On pourra utiliser le lemme de Zorn.
5. Prenons $A = \mathbb{Z}$ et $I = N\mathbb{Z}$. Calculer $\sqrt{I}$.

Exercice 2 : Idéaux comaximaux
Soient A un anneau et I et J deux idéaux.

1. On suppose que $I + J = A$. Montrer que $I^n + J^n = A$ pour tout $n > 0$.
2. On suppose que $I + J = A$. Soit L un idéal tel que $IL \subseteq J$. Montrer que $L \subseteq J$.
3. On suppose que $I \cap J = IJ$. A-t'on forcément $I + J = A$?

Exercice 3 (à préparer) : Idéaux premiers
Soit A un anneau.

1. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier et $I_1, ..., I_n$ des idéaux. On suppose que $\mathfrak{p}$ contient $\prod_{k=1}^n I_k$. Montrer que $\mathfrak{p}$ contient l'un des I_k.
2. Soient I un idéal et $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n$ des idéaux premiers. On suppose que I est contenu dans $\bigcup_{k=1}^n \mathfrak{p}_k$. Montrer que I est contenu dans l'un des $\mathfrak{p}_k$.

Exercice 4 (à préparer) : Vrai ou faux ?
Soit A un anneau.

1. Si a, b et u sont trois éléments A tels que $(a) = (b)$ et $a = bu$, alors $u \in A^\times$.

2. Si A est intègre, I est un idéal principal et A/I est un anneau principal, alors A est principal.
3. Dans $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{13}}{2}]$, l'idéal (3) n'est pas premier, mais il est contenu dans exactement deux idéaux premiers, qui sont maximaux.

Exercice 5 : Vrai ou faux ? Le retour
Soit A un anneau.
1. Tout idéal du quotient d'un anneau principal par un idéal est principal.
2. La somme de deux idéaux non principaux d'un anneau est soit un idéal non principal soit l'anneau tout entier.
3. L'idéal (89) est premier dans $\mathbb{Z}[i]$.
4. L'anneau des nombres décimaux est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(10X-1)$.

Exercice 6 : Quotients d'anneaux
Soit k un corps.
1. Montrer que la k-algèbre $k[X,Y]/(X^2-Y^3)$ est isomorphe à $k[T^2,T^3]$.
2. Montrer que la k-algèbre $k[X,Y]/(X^2-Y)$ est isomorphe à $k[T]$.
3. Plus généralement, soient a et b deux entiers naturels non nuls. Réaliser l'anneau $k[T^a,T^b]$ comme quotient de $k[X,Y]$.
4. Montrer que la k-algèbre $k[X,Y]/(XY-1)$ n'est pas isomorphe à $k[T]$.
5. Réaliser les anneaux $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ et $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ comme quotients de $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 7 : Idéaux dans un anneau principal
Soient A un anneau principal et $x \in A$ non nul. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) l'élément x est irréductible ;
(ii) l'idéal (x) est premier, c'est-à-dire que $A/(x)$ est un anneau intègre ;
(iii) l'idéal (x) est maximal, c'est-à-dire que $A/(x)$ est un corps.

Exercice 8 : Idéaux d'un quotient
Soient A un anneau commutatif unitaire et I un idéal.
1. Montrer que les idéaux de A/I sont en bijection avec les idéaux de A contenant I.
2. Soit $J \supseteq I$ un idéal de A. Montrer que A/J est canoniquement isomorphe au quotient de A/I par J/I.
3. On dit que I est un idéal premier (resp. maximal) si A/I est intègre (resp. un corps). Montrer que les idéaux premiers (resp. maximaux) de A/I sont en bijection avec les idéaux premiers (resp. maximaux) de A contenant I.

4. Déterminer les idéaux des anneaux suivants :

$$\mathbb{R}[X]/(X^2+X+1), \mathbb{R}[X]/(X^3-6X^2+11X-6), \mathbb{R}[X]/(X^4-1), \mathbb{R}[X]/(X^5).$$

Lesquels sont premiers ? Et maximaux ?

5. Combien l'anneau $\mathbb{R}[X]/(X^5(X^4-1))$ possède-t'il d'idéaux ? d'idéaux premiers ? d'idéaux maximaux ?

Exercice 9 : Un contre-exemple

Soit A un anneau.

1. Supposons A intègre. Rappeler pourquoi, si a et b sont deux éléments de A tels que $(a) = (b)$, alors il existe $u \in A^\times$ tel que $a = bu$.

Prenons maintenant $A = \mathbb{Q}[X, Y, Z]/(X - XYZ)$. On note x, y et z les classes de X, Y et Z dans A.

2. Vérifier que A n'est pas intègre.
3. Montrer que $(x) = (xy)$.
4. Montrer qu'il n'existe pas d'élément $u \in A^\times$ tel que $xu = xy$.

Exercice 10 : Corps et idéaux

Soit A un anneau commutatif unitaire.

1. On suppose A intègre et que A possède un nombre fini d'idéaux. Montrer que A est un corps.
2. On suppose que A possède un nombre fini d'idéaux. Montrer que tout idéal premier de A est maximal.
3. On suppose que tout idéal propre de A est premier. Montrer que A est un corps.

Exercice 11 : Idéaux premiers de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

1. Soient A un anneau et I un idéal de A. Notons J l'intersection des idéaux premiers de A contenant I. Le but de cette question est de montrer que $\sqrt{I} = J$.
   (a) Montrer que $\sqrt{I}$ est contenu dans J.
   (b) Réciproquement, soit $a \in A \setminus \sqrt{I}$, et considérons $\mathcal{E}$ la famille constituée des idéaux qui contiennent I mais qui ne contiennent aucune puissance de a. Montrer que $\mathcal{E}$ possède un élément maximal (pour l'inclusion), qui est un idéal premier de A. En déduire que $a \notin J$.
   (c) Conclure.

Soit $\mathcal{C}$ l'anneau des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

2. Quels sont les idéaux maximaux de $\mathcal{C}$? Sont-ils principaux ?
3. Soit $I = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid \forall m \in \mathbb{N}, \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^m} = 0\}$. Montrer que $I = \sqrt{I}$ (on dit que I est un idéal radical). L'idéal I est-il premier ?

4. En déduire que $\mathcal{C}$ possède des idéaux premiers non maximaux.

Exercice 12 : Lemme de Schur
Soit A un anneau. Un A-module est dit *simple* s'il est non nul et ne possède pas de sous-module propre non trivial.

1. Prouver que tout module simple est isomorphe à un $A/\mathfrak{m}$ où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A.

2. Montrer que tout morphisme $f : M_1 \to M_2$ entre deux A-modules simples est soit nul, soit un isomorphisme.

Exercice 13 : Sous-module de torsion
Soit A un anneau. Soit M un A-module. On dit qu'un élément $x \in M$ est de torsion s'il existe $a \in A$ non nul tel que $ax = 0$. On note M_{tor} l'ensemble des éléments de torsion de M. On dit que M est sans torsion si $M_{tor} = 0$.

1. Montrer que M_{tor} est le plus petit sous-module de M tel que M/M_{tor} est sans torsion.

2. Le sous-module M_{tor} a-t'il toujours un supplémentaire dans M ?

Exercice 14 : Sous-groupes du groupe des racines de l'unité
Faire la liste des sous-groupes du groupe des racines de l'unité dans $\mathbb{C}^\times$.

Exercice 15 : Chasses au diagramme

1. Soit A un anneau. Soient $f : M \to N$ et $g : N \to P$ des morphismes de A-modules. Montrer qu'il existe une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g\circ f) \to \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g\circ f) \to \mathrm{Coker}(g) \to 0.$$

2. On considère un diagramme commutatif de A-modules à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5. \end{tikzcd}$$

On suppose que les morphismes f_1, f_2, f_4, f_5 sont des isomorphismes. Montrer que f_3 est un isomorphisme.

Exercice 16 : Déterminant
Soient R un anneau et n un entier naturel non nul. Soit $f : R^n \to R^n$ un morphisme de R-modules. Soit A la matrice de f dans la base canonique de R^n.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est surjectif ;

(ii) f est un isomorphisme ;
(iii) $\det(A) \in R^{\times}$.

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est injectif ;
(ii) $\det(A)$ n'est pas un diviseur de 0 dans R.

Exercice 17 : Le groupe $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ n'est pas abélien libre

On considère le groupe abélien $M = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Le but de cet exercice est de montrer que M n'est pas abélien libre. On procède par l'absurde en supposant que M admet une base B. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note e_n l'élément de M dont tous les termes sont nuls, sauf le n-ème qui vaut 1. On écrit alors e_n comme combinaison linéaire d'une partie finie B_n de B, et on note N le sous-groupe de M engendré par les éléments de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

1. Soit $S = \{(\epsilon_n n!)_{n\in\mathbb{N}} \mid \epsilon_n \in \{-1, 1\}\}$. Montrer qu'il existe $s \in S$ tel que $s \notin N$.

2. Montrer que, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $y \in M/N$ tel que $\overline{s} = ky$.

3. En déduire une contradiction.

Exercice 18 (culturel) : Sous-groupes d'un groupe abélien libre

Dans cet exercice, nous allons montrer que tout sous-groupe d'un groupe abélien libre est abélien libre. Considérons donc A un groupe abélien libre, et soit X une base de A. Soit A_0 un sous-groupe de A. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des triplets (Y, B, ϕ), où Y est une partie de X telle que $A_0 \cap A^{(Y)}$ est abélien libre, B est une base de $A_0 \cap A^{(Y)}$ et $\phi : B \to X$ une injection. Si (Y, B, ϕ) et (Y', B', ϕ') sont deux éléments de $\mathcal{E}$, on dira que $(Y, B, \phi) \preceq (Y', B', \phi')$ si $Y \subseteq Y'$, $B \subseteq B'$ et $\phi = \phi'|_B$. Cela définit une relation d'ordre sur $\mathcal{E}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ possède un élément maximal pour $\preceq$.

2. En déduire que A_0 est abélien libre.

Nous allons maintenant appliquer ce résultat pour montrer que le groupe $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ n'est pas abélien libre par une méthode différente de celle de l'exercice 19. Pour chaque entier x, on note $v_2(x)$ la valuation 2-adique de x (avec la convention $v_2(0) = +\infty$).

3. Soit N le sous-groupe de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n\to+\infty} v_2(x_n) = +\infty$. Montrer que $N/2N$ est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension dénombrable.

4. En déduire que $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ n'est pas abélien libre.