TD2 : Anneaux et modules
Indications de correction

Exercice 4

1. Considérer ν valuation sur A donnée par $\nu(a) := inf\{i \in \mathbb{N}, a_i \neq 0\}$ si $a = \sum_i a_i X^i$ et $\nu(0) = \infty$. Si a et b sont non nuls, leurs valuations sont positives ou nulles et il en est de même de celle du produit ab ce qui montre que A est intègre.

$a \in A$ est inversible si et seulement si a_0 est non nul. Pour le sens réciproque on doit résoudre le système triangulaire

$$a_0 b_0 = 1 \quad \forall k \geqslant 1, \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = 0$$

et on construit par récurrence une unique suite (b_n) qui donne l'inverse de a dans A.

2. Pour I idéal de A, posons $p := min_{x \in I} \nu(x)$. On montre qu'alors $I = (X^p)$. En particulier A possède un unique idéal maximal : (X).

3. La principalité résulte de ce qui précède, et l'unicité de l'idéal maximal donne aussi que tout irréductible est associé à X. Si $a \in A$ et $b \in A$ non nul , on écrit $b = X^p b'$ avec $p = \nu(b)$ et b' inversible. $ab'^{-1} = c_0 + ... + c_{p-1} X^{p-1} + X^p q := r + X^p q$. Alors :

$$a = b' r + bq$$

avec ou bien $r = 0$ ou bien $\nu(r) < \nu(b) = p$.

Exercice 5

1. L'action est donnée par : $P.v := P(f)(v)$.

2. Si $a_0 \bar{1} + ... + a_{d-1} \bar{X}^{d-1} = 0$ dans le quotient alors P divise $a_0 + ... + a_{d-1} X^{d-1}$ dans $\mathbb{C}[X]$ donc tous les a_i sont nuls ce qui donne la liberté. La génération est claire .

3. Si V_f est cyclique en tant que module, on prend v un générateur et P générateur de l'idéal $Ann(v)$ de $\mathbb{C}[X]$. Alors on a un isomorphisme de $\mathbb{C}[X]$-modules $V_f \simeq \mathbb{C}[X]/(P)$ donné par $v \mapsto \bar{1}$. Alors $(v, f(v), ..., f^{d-1}(v))$ ($d = deg(P)$) forme une base de V_f en tant qu'espace vectoriel. Réciproquement si V est cyclique soit v tel que $(v, f(v), ..., f^{d-1}(v))$ forme une base de V_f en tant qu'espace vectoriel ($d = dimV$). On décompose le vecteur $f^d(v)$ sur cette base ce qui donne un polynôme annulateur (et en fait minimal) de

f que l'on appelle P . Du coup le morphisme $\mathbb{C}[X] \to V$, $P \mapsto P(f)(v)$ passe au quotient par (P) et c'est un isomorphisme de $\mathbb{C}[X]$-modules. C'est un module cyclique (prendre $x := \bar{1}$).

Exercice 6

1. Soit M un A-module simple (non nul) . Soit m non nul fixé dans M. Le morphisme $A \to M$, $a \mapsto a.m$ est surjectif car son image est un sous-module non nul de M qui est simple. Ce morphisme passe au quotient en un isomorphisme $A/Ann(m) \to M$. Un idéal contenant $Ann(m)$ correspond à un sous-module de M qui est soit nul (l'idéal est égal à $Ann(m)$) soit M tout entier (et alors l'idéal est A). $Ann(m)$ est donc un idéal maximal.

2. $Ker(f)$ (resp. $Im(f)$) sont des sous-modules de M_1 (resp. M_2) , la simplicité donne ce qu'on veut.

3. ok

Exercice 9

Si $I = (a)$, $\{a\}$ forme une A-base de I. Réciproquement soit (a_j) une base de I. Si on a deux éléments distincts dans la base on écrit $a_j.a_k - a_k.a_j = 0$. La liberté donne $a_j = a_k = 0$ contradiction.