Td n$^\circ$ 2 d'Analyse fonctionnelle

Distributions 1

Séance du 27 février 2010

Exercice 1. *Convergence faible mais pas forte : trois exemples fondamentaux*

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1. (Évanescence) Montrer que $u_n(x) = \phi(x-n) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

2. (Concentration) Montrer que $v_n(x) = \sqrt{n}\phi(nx) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

3. (Oscillations) Soit $w \in L^2(0,2\pi)$ une fonction 2π-périodique non constante et $w_n(x) = w(nx)$. Montrer que $w_n \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ dans $L^2(0,2\pi)$, mais que cette convergence n'est pas forte.

$\star$

Exercice 2. *Partition de l'unité et fonction plateau*

1. Construire une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^∞, telle que $g(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $g(x) = 0$ si $|x| \geq 2$, et $g(x) \in [0,1]$ pour tout x.

Indication : On pourra considérer des fonctions du type $h(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$, où f est définie par $f(y) = \exp(-\frac{1}{1-x^2})$ pour $|y| < 1$ et 0 pour $|y| > 1$.

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et V_i une famille d'ouverts telle que $\bigcup_i V_i = \Omega$. Montrer qu'il existe une suite de fonctions $\varphi_n \ : \Omega \to \mathbb{R}\ C^\infty$ positives telle que pour tout n, φ_n est à support dans l'un des V_i, que pour tout $x \in \Omega$,

$$\sum_i \varphi_i(x) = 1,$$

(la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls) et que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=1}^m \varphi_n|_K = 1$.

3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact de U. Montrer qu'il existe une fonction $\psi \ : U \to \mathbb{R}\ C^\infty$ à support compact dans U, à valeur dans $[0,1]$ et telle que pour tout x dans un voisinage de K, $\psi(x) = 1$.

$\star$

Exercice 3. *Support d'une distribution*

Soit Ω un ouvert. On dit qu'une distribution u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est nulle sur Ω si pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u(\phi) = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des ouverts sur lesquels u est nulle est stable par réunion. On appelle support de u (et on note $\mathrm{Supp}(u)$) le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel u est nul.

2. Montrer que cette notion de support coïncide avec la notion usuelle pour des fonctions régulières. Quel est le support de δ_0 ?

3. Montrer qu'une distribution à support compact est d'ordre fini.

⋆

Exercice 4. *Quelques exemples de distributions*

1. Montrer que $u : \phi \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \phi^{(i)}(i)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini.

2. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ définie par $u(\phi) = \displaystyle\int \phi(x,x)dx$. Montrer que u est bien une distribution, et calculer $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

3. Montrer que $e^{\frac{1}{x^2}}$ appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_*^+)$, mais ne se prolonge pas à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4. Montrer qu'une distribution positive $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (i.e. pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ positive, $u(\phi) \geq 0$) est une mesure.

5. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $v' = u$, et que l'ensemble de telles distributions forme un espace affine.

⋆

Exercice 5. *Distribution dont le support est un point*

Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{Supp}(u) = \{0\}$. En particulier, u est d'ordre fini m.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ positive, telle que $\psi = \mathbb{1}$ sur un voisinage de $\overline{B(0,1/2)}$ et $\mathrm{Supp}\,\psi \in B(0,1)$. On pose $\psi_r(x) = \psi(x/r)$.

1. Rappeler pourquoi $\psi_r u = u$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telle que pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq m$, $(D^\alpha \phi)(0) = 0$.

2. Montrer que $\|\psi_r \phi\|_m \to 0$ quand $r \to 0$.

3. En déduire que $(u, \phi) = 0$.

4. Montrer qu'il existe a_k tels que $u = \sum_{k=0}^{m} a_k \delta_0^{(k)}$.

⋆

Exercice 6. *Valeur principale de* $1/x$

On souhaite définir la valeur principale de $1/x$, notée $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$. On pose :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad (\mathrm{vp}\,x, \phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right).$$

1. Montrer que la limite existe, et que la formule définit bien une distribution. Quel est son ordre ? (Suggestion : écrire grâce à la formule de Taylor, $\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x)$)

2. Montrer que $x\,\mathrm{vp}\,x = \mathbb{1}$. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xu = \mathbb{1}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mathrm{vp}\,x + c\delta_0$.

3. Montrer que $|x|^{\alpha-1}x \rightharpoonup \mathrm{vp}\,x$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $\alpha \to -1$ ($\alpha > -1$).

⋆