Td n° 2 d'Analyse fonctionnelle

Dualité dans les espaces de Banach 2

Séance du 20 février 2015

Exercice 1. *Métrisabilité de la boule unité de E' pour la topologie faible**

Soit E un e.v.n. Le but de cet exercice est de montrer que la boule unité de E' est métrisable pour la topologie faible* si et seulement si E est séparable (c'est à dire si il existe un ensemble dénombrable dense).

1. On suppose que E est séparable, et on considère la distance sur $B_{E'}$

$$d(f,g) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f-g, x_n)|,$$

où $\{x_n\}$ est une partie dénombrable dense de B_E. Montrer que cette distance induit la topologie faible sur $B_{E'}$.

2. Réciproquement, montrer que si $B_{E'}$ est métrisable, alors E est séparable.

Remarque : Symétriquement, B_E est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ si et seulement si E' est séparable.

⋆

Exercice 2. *La sphère unité n'est pas fermée pour la topologie faible*

Soit E un e.v.n de dimension infinie. On va montrer que l'adhérence faible de $\mathbb{S} = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ est $\mathbb{B} = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$.

1. Montrer que tout voisinage faible contient une droite.

2. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| < 1$. Montrer que tout voisinage faible contenant x_0 intersecte $\mathbb{S}$.

3. En utilisant le théorème de Hahn Banach, montrer que $\mathbb{B}$ est fermé pour la topologie faible. Conclure.

⋆

Exercice 3. *Théorème de représentation sur $(L^1)'$*

Le but de cet exercice est de montrer que $(L^1)'$ peut être identifié à L^∞. On se donne $\phi \in L^1(\Omega)'$. On veut donc montrer qu'il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ tel que $< \phi, f >= \int uf \quad \forall f \in L^1$, et de plus $\|u\|_{L^\infty} = \|\phi\|_{(L^1)'}$.

1. On fixe $w \in L^2(\Omega)$ tel que pour tout K compact de Ω, $w \geq \epsilon_K > 0$. Construire u à l'aide de w.

Indication : On pourra utiliser le théorème de représentation dans L^2, et montrer que pour $C > \|\phi\|_{(L^1)'}$,l'ensemble $A = \{x \in \Omega, |u(x)| > C\}$ est négligeable.

2. Attention ! La réciproque est fausse. Construire une forme linéaire sur $(L^\infty)'$ qui ne peut pas se représenter sous la forme $< \phi, f >= \int uf$ avec $u \in L^1$.

⋆

Exercice 4. *Uniforme intégrabilité*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^1(\Omega)$. On dit que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ tel que $mes(A) \leq \delta \Rightarrow (\forall f \in \mathcal{F}, \quad \int_A f \leq \epsilon)$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si et seulement si $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq M\}} |f| \to 0$ quand $M \to +\infty$.

2. Montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante telle que $g(t)/t \to +\infty$ et $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_\Omega g(|f(x)|)dx < +\infty$.

⋆

Exercice 5. *Théorème de Dunford-Pettis*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer que pour toute suite $f_n \in L^1(\Omega)$ bornée, on peut en extraire une sous suite qui converge pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ si et seulement si la famille $\{f_n\}$ est équiintégrable.

On considére dans un premier temps une suite de fonctions $f_n \in L^1(\Omega)$ bornée et équiintégrable. On peut supposer $f_n \geq 0$ pour tout n.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose $f_n^k = f_n\chi_{\{f_n\leq k\}}$. Montrer que $\sup_n \|f_n - f_n^k\| \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$.

2. Montrer que pour tout k, on peut extraire de $(f_n^k)_n$ une suite qui converge faiblement pour $\sigma(L^1, L^\infty)$. On note f^k la limite.

3. Montrer que f^k converge fortement dans L^1. On note f sa limite.

Indication : On pourra utiliser le théorème de Beppo-Levi.

4. Montrer que l'on peut extraire de f_n une sous suite qui converge faiblement pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers f.

On montre maintenant la réciproque. Soit f_n une suite de $L^1(\Omega)$ convergeant faiblement vers f. Notons $\mathfrak{X}$ l'ensemble des fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables de Ω. On introduit les ensembles : $X_n := \left\{1_A \in \mathfrak{X},\ \forall k \geq n,\ \left|\int_A (f_k(x) - f(x))dx\right| \leq \varepsilon\right\}$.

5. Montrer que $\mathfrak{X}$ et X_n sont des fermés (forts) de L^1.

6. Utiliser le théorème de Baire, et montrer que (f_n) est nécessairement uniformément intégrable.

⋆

Exercice 6. *Fonction convexe conjuguée*

Soit E un e.v.n et $\phi : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement (s.c.i). $D(\phi) = \{x, \phi(x) < +\infty\}$ n'est pas forcément E tout entier. Rappelons qu'une fonction ϕ est dite s.c.i. si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E, \phi(x) \leq \lambda\}$ est fermé.

On définit la fonction convexe conjuguée de ϕ pour tout $f \in E'$

$$\phi^*(f) = \sup_{x\in E} \big(< f, x >_{E'\times E} - \phi(x)\big)$$

(cette fonction peut éventuellement valoir $+\infty$).

1. Expliquer pourquoi cette fonction est convexe s.c.i.

2. On introduit $\phi^{**}(x) = \sup_{f\in E'} \big(< f, x >_{E'\times E} - \phi^*(f)\big)$. Montrer que $\phi^{**} \equiv \phi$ (c'est le théorème de Fenchel-Moreau).

Indication : On pourra introduire l'épigraphe de ϕ, $Epi(\phi) = \{(x, \lambda), \quad \phi(x) \leq \lambda\} \subset E \times \mathbb{R}$ et supposer dans un premier temps que $\phi \geq 0$.

⋆