Td n° 2 d'EDP

Autour du front d'onde

Séance du 10 octobre 2014

Exercice 1. *Propagation des singularités pour l'équation des ondes*

1. Résoudre l'équation des ondes sur $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} = (0, f) \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est à support compact. Montrer que si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

On définit le support singulier par $x \notin singsupp(u)$ si il existe un voisinage de x sur lequel u est C^∞, et on définit $\Sigma(f)$ par $\xi \notin \Sigma(f)$ si il existe un voisinage conique de ξ sur lequel $\hat{f}$ est à décroissance rapide.

2. On considère une solution u de (1). Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi(\xi) = 1$ pour $\xi \geq 1$ et $\chi = 0$ au voisinage de 0. On introduit la décomposition

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{2i}(u_+ - u_-) + \frac{1}{(2\pi)^n}\int (1-\chi(\xi))\frac{\sin(t\xi)}{|\xi|}e^{ix.\xi}\hat{f}(\xi)d\xi,$$

où on a noté

$$u_\pm(t,x) = \int \frac{\chi(\xi)}{|\xi|}e^{i(x.\xi \pm t|\xi|)}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

3. Montrer que $WF(u(t)) \subset WF(u_+(t)) \cup WF(u_-(t))$.

4. On suppose que $x_0 \notin supp(f) - t\Sigma_1(f)$ où $\Sigma_1(f) = \Sigma(f) \cap \{|\xi| = 1\}$. Soit U un voisinage de x_0 et Γ un voisinage conique de $\Sigma(f)$ tels que

$$U \cap (supp(f) - t\Gamma_1) = \emptyset.$$

où on a noté $\Gamma_1 = \Gamma \cap \{|\xi| = 1\}$. On introduit ψ homogène de degré 0 telle que $\psi = 1$ sur un voisinage conique de $\Sigma(f)$ et $\psi(\xi) = 0$ pour $\xi \notin \Gamma$. On écrit $u_+ = u_+^1 + u_+^2$ où

$$u_+^1(t,x) = \int \frac{\psi(\xi)\chi(\xi)}{|\xi|}e^{i(x.\xi+t|\xi|)}\hat{f}(\xi)d\xi, \quad u_+^2(t,x) = \int \frac{(1-\psi(\xi))\chi(\xi)}{|\xi|}e^{i(x.\xi+t|\xi|)}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

Montrer que $singsupp(u_+) = singsupp(u_+^1)$.

5. En utilisant la relation

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j - y_j + t\frac{\xi_j}{|\xi|}}{i\left|x - y + t\frac{\xi}{|\xi|}\right|^2}\partial_j e^{i((x-y).\xi+t|\xi|)} = e^{i((x-y).\xi+t|\xi|)},$$

montrer que $u_+^1 \in C^\infty(U)$. En déduire $x_0 \notin singsupp(u(t))$.

6. En déduire le "théorème de propagation des singularités" suivant

$$singsupp(u(t)) \subset \cup_{(x,\xi)\in WF(f)}\left(x \pm t\frac{\xi}{|\xi|}\right).$$

Indication : On pourra démontrer ou admettre que si $\Sigma_x = \{\xi, (x, \xi) \in WF(f)\}$, alors pour tout voisinage conique S de Σ_x, il existe un voisinage V de x tel que pour tout ϕ à support dans V telle que $\phi(x) \neq 0$, on ait $\Sigma(\phi f) \subset S$.

⋆

Exercice 2. *Transformée FBI et analyticité*

Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On appelle transformée FBI (Fourier-Bros-Iagolnitzer)

$$P^t f(\xi, x) = \int e^{-2\pi i y\xi - \pi t(y-x)^2} f(y) dy.$$

1. Montrer que $t^{\frac{1}{4}} P^t$ est une isométrie $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. En déduire une formule pour l'inverse de P^t.

Le but de l'exercice est de montrer le théorème suivant

Théorème 1. *Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Alors f est analytique au voisinage de x_0 si et seulement si f vérifie la propriété $A(x_0)$ qui dit :*

il existe un voisinage U de x_0 et des constantes ε, C, K telles que pour tout $x \in U$

$$|P^t f(t\xi, x)| \leq C e^{-\varepsilon t} \quad \forall |\xi| \geq K, t \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que la propriété $A(x_0)$ est locale : si f vérifie $A(x_0)$ et $g = f$ au voisinage de x_0 alors g vérifie aussi $A(x_0)$.

3. On suppose que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ est analytique au voisinage de x_0. Montrer que l'on a

$$P^t f(t\xi, x) = \int e^{-2\pi i(y - i\delta sgn(\xi)\chi(y))\xi - \pi(y - i\delta sgn(\xi)\chi(y) - x)^2} f(y - i\delta sgn(\xi)\chi(y))(1 - i\delta sgn(\xi)\chi'(y)) dy,$$

où $\chi \in C_c^\infty$ est à support dans $\{|y - x_0| < 2\delta\}$ telle que $\chi = 1$ sur $\{|y - x_0| < \delta\}$ et δ est bien choisi.

4. En déduire que la condition $A(x_0)$ est vérifiée pour C, K, ε bien choisis.

5. on considère la distribution D définie par

$$< f, D >= \int \int e^{2\pi i x\xi - 2\pi a x^2 |\xi|}(1 + iaxsgn(\xi)) f(x) dx d\xi.$$

Montrer que $D = \delta$.

Indication : On pourra montrer que D est supportée en 0, puis que $< f, D >= 0$ si f s'annule jusqu'à l'ordre 2 en 0, puis que $< f, D >= 0$ si f s'annule jusqu'à l'ordre 1 en 0.

6. Montrer la formule suivante

$$P^t(fg)(t\xi, x) = \int P^{\frac{t}{2}} f(t\xi - \eta, x) P^{\frac{t}{2}} g(\eta, x) d\eta.$$

7. En déduire que si $f, g \in C_c^\infty$ vérifient $A(x_0)$, il en est de même pour fg.

8. On suppose que $f \in C_c^\infty$ satisfait $A(x_0)$. En utilisant le formule

$$f(x) =< D(x - .), f >$$

montrer que l'on peut prolonger f en une fonction holomorphe sur un voisinage de x_0 dans $\mathbb{C}$. Conclure.

⋆