TD 3 : Principe du maximum ; logarithme d'une fonction

Exercices : à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices : seront traités en classe en priorité.
Exercices : plus difficiles.

Exercice 1: Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0.

1. Existe-t'il une fonction holomorphe $f \in H(U)$ telle que $f\left(\frac{1}{n}\right) = -f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{100}}$ pour tout entier n assez grand ?
2. Existe-t'il une fonction holomorphe $f \in H(U)$ telle que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^{100}\ln n}$ pour tout entier n assez grand ?

Exercice 2: (pour la semaine du 26 février)

Soient v et w deux complexes non nuls. A quelle condition sur v et w existe-t'il des fonctions entières non constantes telles que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z+v) = f(z+w) = f(z)?$$

Exercice 3: (pour la semaine du 26 février)

Montrer que les fonctions holomorphes du disque unité ouvert dans lui même qui sont propres, i.e. telles que $|f| \to 1$ quand $|z| \to 1$, sont des produits finis d'automorphismes du disque.

Exercice 4: Soit $D = D(0,1)$. Soit f une fonction continue sur $\overline{D}$, dont la restriction à D est holomorphe.

1. On suppose que $f(z) = 0$ pour tout $z \in \partial D$. Montrer que $f = 0$.
2. On suppose qu'il existe un ouvert non vide W de ∂D tel que $f(z) = 0$ pour tout $z \in W$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 5:

Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{D}(0,r)$, telle que $f(0)$ ne soit pas nul. On note $M = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (indépendante de f) telle que le nombre de zéros de f dans $D(0, r/3)$ est inférieur ou égal à $C \log(M/|f(0)|)$. On pourra considérer la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{\Pi(1-\frac{z}{z_m})}$ où les z_m sont les zéros de f dans $D(0, r/3)$.

Exercice 6:

On note D le disque unité ouvert.

1. Soit $f \in H(D)$. On suppose que
$$\forall z \in D, \ |f(z)| \le 1 \quad ; \quad f(0) = 0.$$
Montrer le lemme de Schwarz :
$$\forall z \in D, \ |f(z)| \le |z| \quad ; \quad |f'(0)| \le 1.$$
Quels sont les cas d'égalité ? En déduire que si f est une fonction holomorphe et injective sur D, telle que $f(0) = 0$, $|f'(0)| \le 1$ et $D \subset f(D)$, alors $f(z) = \alpha z$ pour un certain α de module 1.
2. Soit f une fonction holomorphe sur D, telle que $f(0) = 1$ et $\mathrm{Re}(f) \ge 0$. En considérant la fonction $z \mapsto \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$, montrer que :
$$\forall z \in D, \ \frac{1-|z|}{1+|z|} \le |f(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$
3. Soit f une fonction holomorphe sur D. On suppose que $|f| \le 1$. Montrer le lemme de Schwarz-Pick :
$$\forall z \in D, \ \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2}.$$
Déterminer les biholomorphismes du disque.

4. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert $U = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z > 0\}$ à valeurs dans D, telles que $f(1+i) = 0$. Déterminer $\sup_{f\in\mathscr{F}} |f(2+i)|$. On pourra introduire un biholomorphisme entre D et U.

Exercice 7: ✍

Soit $0 < r < R$ deux réels, U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant la couronne fermée centrée en l'origine de rayons r et R. Soit $f \in H(U)$ non nulle. On pose, pour $r \le \rho \le R$,

$$M(\rho) = \sup\{|f(z)|, |z| = \rho\}.$$

Montrer que la fonction $\ln\rho \mapsto \ln M(\rho)$ est (bien définie et) convexe. On pourra considérer les fonctions $z \mapsto z^p f(z)^q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8: ✍

1. Rappeler le théorème de Borel-Carathéodory.
2. *Application 1.* Si $n \ge 1$, on note $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des $f \in H(\mathbb{C})$ telles que

   $$|f(z)| =_{|z|\to+\infty} O(\exp^{\circ n}(|z|)).$$

   Montrer par récurrence sur n que si $f \in \mathscr{E}_n$ est non constante, $\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{C})$ est soit vide, soit un singleton.
   Ce résultat est un cas particulier simple du "petit" théorème de Picard que l'on recroisera plus tard.
3. *Application 2.* Si P est un polynôme non nul, montrer que l'équation $\exp(z) - P(z) = 0$ a une infinité de solutions.

Exercice 9:

1. On note $V = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \ge 0\}$. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant V, telle que $|f(z)| \le 1$ si z est sur l'axe imaginaire et telle qu'il existe $0 < \delta < 1$ et des constantes A, B tels que

   $$|f(z)| \le A\exp(B|z|^{1-\delta})$$

   pour tout $z \in V$.
   (a) On note $g(z) = \exp(z^{1-\delta/2})$ (où $z^{1-\delta/2}$ est la détermination définie sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, positive sur l'axe réel positif, prolongée par 0 en 0). Montrer que $|g|$ est minorée par 1 sur l'axe imaginaire et que $|g(z)| \ge \exp(R^{1-\delta/2}m)$ si $z \in V$ vérifie $|z| = R$, pour une certaine constante $m > 0$ ne dépendant que de δ.
   (b) Pour $n \ge 1$ entier, on pose $h_n(z) = \frac{f(z)^n}{g(z)}$. Majorer $|h_n|$ au bord du demi-disque ouvert $\mathring{V} \cap D(0,R)$ et en déduire que f vérifie :
   $$\forall z \in V,\ |f(z)| \le 1.$$
2. En déduire que si f est une fonction entière non constante telle qu'il existe $\epsilon < 1/2$ et des constantes A, B tels que
   $$\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \le A\exp(B|z|^{\epsilon}),$$
   alors f n'est bornée sur aucune demi-droite partant de l'origine.
3. *Application.* Soit f une fonction holomorphe non nulle sur un disque centré en 0, solution de l'équation $f'(z) = -f(z/2)$. Montrer que f est entière et que si pour tout $R > 0$, on note $M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|$, alors $M(R) \le 2RM(R/2)$ dès que $R \ge 1$. Montrer que f n'est bornée sur aucune demi-droite partant de l'origine.

Exercice 10: Soit f une fonction holomorphe bornée sur D, avec $f(0) = 0$ et $f'(0) \ne 0$. Soit $M = \sup_D |f|$. Soit $u \in \mathbb{C} \setminus f(D)$.

1. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe g sur D telle que $g(z)^2 = 1 - f(z)/u$ pour tout z, et $g(0) = 1$.
2. A l'aide de la formule de Parseval, montrer que $|u| \ge |f'(0)|^2/(4M)$. En déduire que

   $$D\left(0, \frac{|f'(0)|^2}{4M}\right) \subset f(D).$$

Il est amusant de comparer cet exercice à l'exercice 16 du TD 2.

Exercice 11: Soit f une fonction holomorphe et injective sur le disque unité, telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=1$. Le but de cet exercice est de montrer le "théorème 1/4" de Koebe : $D(0,1/4)\subset f(D(0,1))$.

1. Soit g la fonction sur $\mathbb{C}\setminus\bar{D}(0,1)$ définie par $g(z)=z+\sum_{n\geq 0} b_n z^{-n}$ (on suppose que cette somme converge pour tout z tel que $|z|>1$). Montrer que g est holomorphe.
2. Déterminer l'image par $z\mapsto z+b_0+b_1/z$ de $S(0,r)$, pour r grand.
3. Montrer que pour tout $\epsilon>0$, pour r suffisamment grand, l'aire A_r de
$$\mathbb{C}\setminus g(\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>r\})$$
vérifie $|A_r-\pi r^2|<\epsilon$.
4. En déduire que si g est injective, l'aire de $\mathbb{C}\setminus g\big(\mathbb{C}\setminus\bar{D}(0,1)\big)$ vaut
$$\pi\left(1-\sum_{n\geq 1} n|b_n|^2\right).$$
5. On prend f comme au début de l'énoncé. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe injective g sur $\mathbb{C}\setminus\bar{D}(0,1)$ telle que $g(z)^2=1/f(z^{-2})$ et qui admet un développement comme à la première question.
6. Déterminer le coefficient b_1 de g en fonction des coefficients du développement en série entière de f. En déduire que $|f''(0)|\leq 4$.
7. En appliquant le résultat de la question précédente aux fonctions de la forme $z\mapsto uf(z)/(u-f(z))$, où $u\in\mathbb{C}\setminus f(D(0,1))$, conclure que $D(0,1/4)\subset f(D(0,1))$.

Exercice 12: Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et Δ une droite (réelle) dans $\mathbb{C}$. Soit f une fonction continue sur U dont la restriction à $U\setminus\Delta$ est holomorphe. Montrer que f est holomorphe sur U.

Exercice 13: (pour la semaine du 5 mars)

Soit $D=D(0,1)$. Soient f et g deux fonctions continues et ne s'annulant pas sur $\overline{D}$, holomorphes sur D. On suppose que $|f|=|g|$ sur le bord de D. Montrer que f et g sont proportionnelles. On pensera à utiliser le principe de réflexion de Schwarz.

Exercice 14: Partiel 2017 (si le temps le permet)

L'objectif de cet exercice est de démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de $f\in H(\mathbb{C})$ tel que $f\circ f=\exp$. Supposons qu'il existe une telle fonction f.

1. Montrer que $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}^\times$.
2. Montrer qu'il existe une détermination holomorphe g du logarithme de f.
3. Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{C}$ tel que $g\circ f=\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}+c$.
4. Conclure.

Exercice 15: Partiel 2017 (pour la semaine du 5 mars)

Soit $\alpha>1/2$. Soit :
$$\Omega=\{re^{i\theta}|r>0,-\frac{\pi}{2\alpha}<\theta<\frac{\pi}{2\alpha}\}.$$
Soit $f\in\mathscr{C}(\Omega,\mathbb{C})$ telle que $f|_\Omega\in H(\Omega)$. On suppose que $M=\sup_{z\in\partial\Omega}|f(z)|<+\infty$ et qu'il existe $A>0$ et $\rho\in]0,\alpha[$ tels que $|f(z)|\leq A\exp(|z|^\rho)$ pour tout $z\in\Omega$. On va montrer que $\sup_{z\in\overline{\Omega}}|f(z)|=M$.

1. Justifier que l'on puisse définir une détermination holomorphe du logarithme dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, puis rappeler comment y définir naturellement $z\mapsto z^\gamma$ pour $\gamma\in\mathbb{C}$.
2. Montrer que pour tout $\epsilon>0$ assez petit on a $\lim_{|z|\to\infty,z\in\Omega} f(z)\theta_\epsilon(z)=0$, avec $\theta_\epsilon(z)=\exp(-\epsilon z^{\rho+\epsilon})$.
3. Montrer que pour tout $\epsilon>0$ assez petit on a $\sup_{z\in\overline{\Omega}}|f(z)\theta_\epsilon(z)|\leq M$. Conclure.
4. Montrer que si $M<\infty$ et s'il existe $A>0$ et $B>0$ tels que $|f(z)|\leq A\exp(B|z|^\alpha)$ pour tout $z\in\Omega$, alors la conclusion précédente peut tomber en défaut.