Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$3 Corrigé

1 Mondanités

Exercice 1 🏠✐ : questions diverses

1. La notion n'est pas stable : $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $]0;1[$ pour la distance induite par la valeur absolue, et le premier est complet pour cette distance alors que le second ne l'est pas.

2. La fonction arctan réalise une isométrie entre $(\mathbb{R}, d)$ et $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ muni de la distance induite par la valeur absolue, et il n'est pas complet non plus.

3. Soit x l'unique point fixe de f^p. Alors comme

$$f^p(f(x)) = f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(x),$$

$f(x)$ est également un point fixe de f^p, par unicité, $f(x) = x$ et donc f a au moins un point fixe. Comme tout point fixe de f est également point fixe de f^p, celui-ci est nécessairement unique.

4. Commençons par remarquer que sur un espace métrique quelconque, une suite est de Cauchy pour une distance d et et seulement si elle l'est également pour la distance $d' := \frac{d}{1+d}$. Ensuite, on s'aperçoit qu'une suite de X est de Cauchy si et seulement si chacune de ses coordonnées est une suite de Cauchy, de sorte que X est complet si et seulement si les (X_n) le sont.

Plus précisément, supposons les X_n complets et soit (x_p) une suite de Cauchy de X. Alors pour tout n

$$d'_n(x_{p,n}, x_{q,n}) \leq 2^n d(x_p, x_q).$$

Ainsi chacune des suites coordonnées $(x_{p,n})$ est de Cauchy, donc elles convergent respectivement vers une limite l_n car les X_n sont complets. La suite (x_p) converge donc simplement vers la limite $l = (l_n)$, donc elle converge pour la distance d car celle-ci induit la topologie produit, de sorte que X est bien complet.

Réciproquement, en choisissant un élément $y \in X$ et en considérant les applications

$$x_m \in X_m \mapsto (y_n \text{ si } n \neq m \text{ et } x_m \text{ sinon}) \in X,$$

on s'aperçoit que chaque X_n muni de la distance $\frac{d'_n}{2^n}$ est isométrique à un fermé de X, et ils sont donc complets si X l'est.

Exercice 2 🏠✐ : Exemples d'espaces complets

(a) Le théorème de Weierstrass assure que celui-ci n'est pas complet, de plus, un espace vectoriel normé de dimension infinie dénombrable ne saurait être complet à cause du théorème de Baire. Une complétion est donnée par l'ensemble des fonctions continues sur $[0; 1]$.

(b) C'est un sous-espace fermé de l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ car une limite uniforme de fonctions tendant vers 0 tend également vers 0, il est donc complet.

(c) Cet espace là est dense dans le précédent, il n'est donc pas complet mais on en a déjà une complétion.

(d) On a vu que $\mathbb{K}[X]$ était dense dans $\mathbb{K}[[X]]$ pour cette distance, il ne peut donc pas être complet. Cependant, $\mathbb{K}[[X]]$ l'est et il en fait donc une complétion. En effet, soit (A_n) une suite de Cauchy de séries formelles, à partir d'un certain rang, $d(A_p, A_q) < e^{-(n+1)}$ de sorte que la valuation de $A_p - A_q$ est supérieure à n. Autrement dit, les A_p ont donc les mêmes n premiers termes à partir de ce rang. Soit $A := (a_n)$ la série formelle dont les coefficients sont les limites des coefficients de la suite de série. (qui stationnent à cette dernière) On a bien (A_n) qui tend vers A.

Exercice 3 ✐✐ : anneau des entiers p-adiques

1. Il s'agit de montrer que les ouverts sont les mêmes de chaque côté. Comme on sait que chacune de ces topologies est métrisable, on peut se ramener à montrer qu'elles ont les mêmes suites convergentes. (Cela assure que l'identité est un homéomorphisme entre ces deux espaces métriques)

On sait que les suites convergentes pour la topologie produit sont celles qui convergent composante par composante, comme les ensembles sont discrets, cela revient à stationner. Comme une suite converge pour la distance p-adique si et seulement si elle stationne sur chacune de ses composantes (comme pour les séries formelles), on a bien le résultat.

2. La démonstration est identique à celle des séries formelles. On a montré que $\mathbb{Z}_p$ est complet, il est donc fermé dans $\prod \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, qui est compact puisque c'est un produit dénombrable de compacts, il est donc également compact.

3. (✐✐) Commençons par quelques remarques préliminaires sur $\mathbb{Z}_p$. Clairement, $\mathbb{Z}_p$ est un anneau car c'est un sous-anneau de l'anneau produit $\prod \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. L'addition, la multiplication et l'addition y sont continues, et un nombre est inversible si et seulement si il n'est pas divisible par p. On a naturellement une injection $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ qui assure que $\mathbb{Z}_p$ est une complétion de $\mathbb{Z}$ muni de la distance p-adique car l'image de $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$ pour la distance donnée. On en déduit une nouvelle injection

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p \left[\frac{1}{p} \right]$$

qui est un morphisme de corps. La complétude de $\mathbb{Z}_p$ ne suffit pas à affirmer celle de $\mathbb{Q}_p$ directement (il n'est même pas a priori clair comment munir d'une topologie le corps des fractions d'un anneau topologique, quoi que ... Mais ici il n'y aura pas de problème.

Montrons que $\mathbb{Q}_p$ est complet si on le munit de la distance engendrée par la valuation, étendue à $\mathbb{Q}_p$ par $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$. Soit (x_n) une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}_p$. Celle-ci est bornée, donc il existe N tel que $d(0, x_n) < e^N$, ce qui signifie que $\nu(x_n) > -N$, et donc $(p^N x_n)$ est une suite de $\mathbb{Z}_p$, qui est complet, donc elle converge. Par continuité de la multiplication par un élément du corps, la suite (x_n) converge bien et $\mathbb{Q}_p$ est complet.

Exercice 4 : complété d'un espace métrique

1. a) L'espace des fonctions bornées de X vers $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme est un espace complet. Comme une limite uniforme de fonctions continues est continue, les fonctions continues forment un sous-espace fermé, qui est donc également complet.

b) La fonction f est bien définie car pour tout y on a

$$|f_x(y)| = |d(y, x) - d(y, x_0)| \leq d(x, x_0)$$

avec égalité pour $y = x$ ou x_0. De même on a plus précisément

$$|f_x(y) - f_{x'}(y)| \leq |d(y, x) - d(y, x')| \leq d(x, x')$$

avec égalité en $y = x$ ou x'. Donc on a bien

$$\|f_x - f_{x'}\|_\infty = d(x, x'),$$

de sorte que f réalise une isométrie.

c) Il suffit de considérer l'adhérence de l'image par f de X :

$$i : X \longrightarrow \overline{f(X)}.$$

C'est un espace complet car fermé dans un espace complet, X y est dense par construction et l'application est bien une isométrie puisque f l'est.

2. Un espace vérifiant cette condition est unique à isométrie près car il vérifie une propriété universelle. Soient $(\tilde{X}, \tilde{d}_X)$ et $(\tilde{Y}, \tilde{d}_Y)$ deux ensembles vérifiant ces propriétés, avec les isométries i_X et i_Y. Montrons qu'ils sont isométriques.
Soit $j : i_X(X) \to \tilde{Y}$ l'application telle que $j(x) = i_Y(i_X^{-1}(x))$ pour tout $x \in i_X(X)$.
Cette application réalise une isométrie entre son espace de départ et son image (car c'est la composée de deux isométries). En particulier, elle est uniformément continue et, puisque $i_X(X)$ est dense dans $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ est complet, elle se prolonge en une application continue de $\tilde{X}$ vers $\tilde{Y}$, qu'on note toujours j.
L'application j prolongée est toujours une isométrie (car c'est une isométrie sur un sous-ensemble dense de son espace de définition). Elle est donc injective.
De plus, son image est complète. En effet, si un espace métrique est complet, tous les espaces métriques qui lui sont isométriques sont également complets ; $\tilde{X}$ est complet donc $j(\tilde{X})$ l'est

aussi. Comme $j(\tilde{X})$ est un sous-espace de $\tilde{Y}$, c'est un sous-espace fermé. Il contient une partie dense, $i_Y(\tilde{Y})$, donc il est égal à $\tilde{Y}$: j est surjective.
L'application j est donc une isométrie de $\tilde{X}$ vers $\tilde{Y}$.

Exercice 5 ⫽⫽⫽ : théorème d'Alexandroff-Mazurkiewicz

1. a) On peut supposer que d' est bornée. En effet, $d_2 = \min(1, d')$ est une distance qui engendre la même topologie que d' et telle que (X, d_2) est complet.
On peut également supposer que A est dense dans X, quitte à remplacer X par $\overline{A}$. En effet, l'espace $\overline{A}$ est aussi complet (c'est un fermé d'un espace complet). De plus, si A est une intersection dénombrable d'ouverts de $\overline{A}$, c'est aussi une intersection dénombrable d'ouverts de X.

Démonstration de l'affirmation qui précède. Si A est une intersection dénombrable d'ouverts de $\overline{A}$, on peut écrire $A = \bigcap_n \left(\overline{A} \cap V_n\right) = \left(\bigcap_n V_n\right) \cap \overline{A}$ avec les V_n ouverts dans X.
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \{x \in X \text{ tq } d(x, \overline{A}) < 1/n\}$. Les W_n sont ouverts et leur intersection vaut $\overline{A}$.
Donc $U = \left(\bigcap_n V_n\right) \cap \left(\bigcap_n W_n\right)$. C'est bien une intersection dénombrable d'ouverts de X. $\square$

b) Posons, pour tout $z \in X$, $f(z) = \sup \left\{\limsup_n d'(x_n, x_{n+1}) \text{ tq } x \in A^{\mathbb{N}} \text{ et } x_n \to z \text{ pour } d\right\}$.

- Si $z \in A$, $f(z) = 0$ et f est continue en z pour la distance d : toute suite x d'éléments de A convergeant vers z pour d converge aussi vers z pour d', puisque les distances d et d' engendrent la même topologie sur A. Donc x est de Cauchy pour d' et $d'(x_n, x_{n+1}) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Puisque c'est vrai pour toute suite x, $f(z) = 0$.

  Montrons que f est continue en z. Soit (z_n) une suite d'éléments de X convergeant vers z. On suppose par l'absurde que $f(z_n) \not\to f(z) = 0$. Quitte à extraire, on peut supposer que $f(z_n) > \epsilon$ pour tout n, pour un certain $\epsilon > 0$.

  Pour tout n, soit $(x_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A convergeant vers z_n pour d telle que $\limsup_m d'(x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)}) > \epsilon$. Soit $m(n)$ tel que :

  $$d(x_{m(n)}, z_n) < \frac{1}{n+1} \qquad d(x_{m(n)+1}, z_n) < \frac{1}{n+1} \qquad d'(x_{m(n)}, x_{m(n)+1}) > \epsilon$$

  La suite $(x_{m(1)}, x_{m(1)+1}, x_{m(2)}, x_{m(2)+1}, ...)$ converge vers z pour la distance d. Elle converge donc aussi pour la distance d', ce qui est absurde car elle n'est pas de Cauchy pour d'.

- Si $z \in X - A$, $f(z) > 0$ et f n'est pas continue en z : soit x une suite d'éléments de A convergeant vers z pour la distance d. Une telle suite existe car A est dense dans X. La suite x n'est pas de Cauchy pour d', sinon sa limite serait dans A, puisque (A, d') est complet.

  Puisque cette suite n'est pas de Cauchy, il existe $n_0, n_1, n_2, ...$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $d'(x_{n_{2k}}, x_{n_{2k+1}}) \not\to 0$ quand $k \to +\infty$. La suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers z pour d donc $f(z) \geq \limsup_n d'(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) > 0$.

Puisque A est dense dans X, il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers z. Pour tout n, $f(z_n) = 0$ (puisque $z_n \in A$). Donc $f(z_n) \not\to f(z)$. Donc f n'est pas continue en z.

c) L'ensemble A est donc l'ensemble des points de continuité de la fonction f. D'après l'exercice 4, question 1, c'est une intersection dénombrable d'ouverts.

2. a) Si $U = X$, c'est évident : $d' = d$ convient.
Sinon, posons, pour tout $x \in U$, $f(x) = d(x, X - U) > 0$ et définissons, pour tous $x, x' \in U$:

$$d'(x,x') = d(x,x') + \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x')}\right|$$

La fonction d' est symétrique. De plus, $d' \geq d$ donc d' est séparante. Elle vérifie l'inégalité triangulaire. C'est donc une distance.

- Les distances d et d' engendrent la même topologie sur U : d'un part, puisque $d' \geq d$, la topologie engendrée par d' est plus fine que celle engendrée par d. Montrons la réciproque. Soient $x \in U$, $\epsilon > 0$. Il faut montrer que $B_d(x, \epsilon') \subset B_{d'}(x, \epsilon)$ pour un certain $\epsilon' > 0$.

  La fonction f est continue et ne s'annule pas au voisinage de x ; son inverse $1/f$ est donc également continue. Soit ϵ' suffisamment petit pour que :

  $$\forall x' \in B_d(x,\epsilon'), \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x')}\right| < \epsilon/2$$

  Alors $B_d(x, \min(\epsilon', \epsilon/2)) \subset B_{d'}(x, \epsilon)$.
- (U, d') est complet : soit (x_n) une suite de Cauchy pour d'. Puisque $d' \geq d$, c'est aussi une suite de Cauchy pour d. Soit x_∞ sa limite pour d. Si $x_\infty \in U$, alors $x_n \to x_\infty$ pour d' puisque d et d' engendrent la même topologie sur U. Il suffit donc de montrer que $x_\infty \in U$. Si ce n'est pas le cas, $f(x_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} d'(x_m, x_n) = +\infty$. Ce n'est pas possible, puisque la suite est de Cauchy, donc $x_\infty \in U$.

b) Supposons maintenant que $A = \bigcap\limits_n U_n$ avec U_n ouvert dans x, pour tout n. Pour tout n, notons d'_n une distance sur U_n qui engendre la même topologie que d et rend U_n complet. Elle existe, d'après le lemme précédent.
Quitte à remplacer les d'_n par $\min(1, d'_n)$, on peut supposer que ces distances sont bornées par 1.
Posons $d' = \sum\limits_n 2^{-n} d'_n$.

- La distance d' engendre la même topologie que d sur A. De manière générale, si, sur un espace X, les δ_n sont des distances bornées par 1 engendrant la même topologie, $\sum\limits_n 2^{-n}\delta_n$ engendre aussi la même topologie.
- Pour la distance d', A est complet. En effet, si x est une suite de Cauchy pour d', c'est une suite de Cauchy pour chaque d'_n (car $d'_n \leq 2^n d'$). Elle admet donc une limite dans U_n pour chaque d'_n. Cette limite est également la limite pour d (puisque d'_n et d sont équivalentes

sur U_n ; la convergence pour d'_n implique donc la convergence pour d). Toutes les limites pour les d'_n sont donc les mêmes et appartiennent donc à $\bigcap_n U_n = A$. Notons x_∞ la limite. Puisque x converge vers x_∞ pour chaque d'_n, x converge vers x_∞ pour d' et cette suite de Cauchy a bien une limite.

2 Autour du théorème du point fixe

Exercice 6 ✐✐ : Un exercice Picard

1. Montrons que l'ensemble des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance de Hausdorff est complet. La démonstration qui suit s'applique dans le cas plus général d'un espace métrique complet X. Soit (K_n) une suite de Cauchy de compacts pour la distance de Hausdorff.
• Commençons par remarquer que la suite de fonction $d_{K_n} - d_{K_0}$ est de Cauchy :

$$\|(d_{K_p} - d_{K_0}) - (d_{K_q} - d_{K_0})\|_\infty = \delta(K_p, K_q).$$

Comme l'espace des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ est complet, elle converge vers une fonction continue $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Par suite, la suite d_{K_n} converge donc uniformément vers $\psi := d_{K_0} + \varphi$.

• Remarquons que $L := \overline{\bigcup K_n}$ est compact : c'est un fermé d'un complet, il est donc complet également. Montrons qu'il est précompact, c'est à dire qu'on peut le recouvrir par un nombre fini de boules d'un rayon donné.

Soit $\epsilon > 0$. Comme la suite de compacts est de Cauchy, à partir d'un certain rang n_0 on a $\delta(K_p, K_{n_0}) < \epsilon$, de sorte que les compacts au delà du rang n_0 sont dans l'ϵ-voisinage de K_{n_0}. L'espace $B := \bigcup_{i=0}^{n_0} K_i$ est compact, il est donc possible de le recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ϵ. Ainsi, comme tout point de L se trouve à distance au plus ϵ d'un point de B, il se trouve à distance au plus 2ϵ d'un des centres des boules du recouvrement. On est donc à recouvrir L par des boules de rayon 2ϵ. Ainsi, L est bien précompact, donc compact.

• Soit $K := \psi^{-1}(0)$. C'est un compact, et de plus on a $\psi \geq d_K$. En effet, si $x \in X$, pour tout n il existe un $x_n \in K_n$ tel que $d_{K_n}(x) = d(x, x_n)$. Quitte à extraire, on peut supposer que x_n tend vers $l \in L$, ainsi

$$\psi(x) = \lim d_{K_n}(x) = d(x, l).$$

Donc en particulier, si $x \in K$, $\psi(x) = 0$ et donc $x = l \in L$, de sorte que finalement $K \subset L$. Puisque ψ est continue, c'est un fermé, et il est donc compact. Enfin, si l'on suppose de nouveau que x est quelconque, en passant à la limite dans $d_{K_n}(x_n) = 0$, il vient que $\psi(l) = 0$, et donc $l \in K$, ainsi on peut en déduire que

$$\psi(x) = d(x, l) \geq d_K(x).$$

• Enfin, on a en réalité comme on se doute depuis le début, $\psi = d_K$: prenons $x \in X$ et $k \in K$ tel que $d(x, k) = d_K(x)$, en passant à la limite dans

$$|d_{K_n}(x) - d_{K_n}(k)| \leq d(x, k)$$

il vient que $\psi(x) \leq d(x,k) = d_K(x)$. On a finalement que $K_n \longrightarrow K$ puisque

$$\delta(K_n, K) = \|d_{K_n} - d_K\|_\infty = \|d_{K_n} - \psi\|_\infty \longrightarrow 0.$$

2. On va montrer que l'application $T : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ est une contraction. Prenons deux compacts K et L à distance a. Cela signifie par l'exercice sur la distance de Hausdorff que $K \subset V_a(L)$ et $L \subset V_a(K)$. Soit $k \in K$, il existe donc $l \in L$ tel que $d(k,l) \leq a$, mais alors pour tout i on a $d(f_i(k), f_i(l)) \leq ka$ (NDLR "ka" : pas trop compliqué à placer, ce mot peut rapporter pas mal de points au scrabble) et par conséquent $f_i(K) \subset V_{ka}(f_i(L))$. En faisant l'union il vient que $T(K) \subset V_{ka}(T(L))$ puisque $V_\bullet$ commute à l'union. De même en inversant les rôles de K et L, il vient que $T(L) \subset V_{ka}(T(K))$, et donc $d(T(K), T(L)) \leq ka = kd(K,L)$, i.e. T est une contraction.
3. Il suffit de prendre $f_1(x) = \frac{x}{3}$ et $f_2(x) = \frac{2+x}{3}$. (Faire un dessin ou bien utiliser le développement triadique des éléments de l'ensemble de Cantor. Il est possible de retrouver les nombreuses fractales de cette manière, les flocons, les éponges et autres tapis.

Exercice 7 : Picard à paramètre

On note a_y le point fixe de $f(\bullet, y)$. Soit $y_0 \in Y$ et $\epsilon > 0$. Par continuité de $f(a_{y_0}, \bullet)$ en y_0, il existe un voisinage V du point y_0 tel que pour tout $y \in V$ on ait

$$d(f(a_{y_0}, y), f(a_{y_0}, y_0)) = d(f(a_{y_0}, y), a_{y_0}) < \epsilon.$$

On a maintenant pour $y \in V$

$$\begin{aligned} d(a_y, a_{y_0}) &= d(f(a_y, y), f(a_{y_0}, y_0)) \\ &\leq d(f(a_y, y), f(a_{y_0}, y)) + d(f(a_{y_0}, y), f(a_{y_0}, y_0)) \\ &\leq kd(a_{y_0}, a_y) + \epsilon \end{aligned}$$

d'où finalement

$$d(a_y, a_{y_0}) \leq \frac{\epsilon}{1-k}$$

et $y \mapsto a_y$ est bien continue.

Exercice 8

1. Cet espace est isométrique à $\mathbb{R}$ muni de la distance euclidienne usuelle, il est donc complet.
2. Il suffit pour cela de montrer que f est une k-contraction de $\mathbb{R}_+^*$ pour la distance donnée.

Soit $y > x > 0$, alors

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) &= |\ln f(x) - \ln f(y)| \\
&= \left| \int_x^y \frac{f'(t)}{t} \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_x^y \frac{|f'(t)|}{t} \mathrm{d}t \\
&\leq \int_x^y \frac{k}{t} \mathrm{d}t \\
&= kd(x, y).
\end{aligned}$$

Le théorème du point fixe assure alors l'existence d'un unique point fixe à f.

Exercice 9 : Un espace non complet vérifiant le théorème du point fixe.

1. S'il était complet, il serait fermé dans $\mathbb{R}^2$, et ce n'est pas le cas, il n'est donc pas complet. On peut par exemple prendre la suite de points $\left(\frac{1}{n\pi}, 0\right)$ qui tend vers $(0, 0)$, mais la limite n'appartient pas à E. Remarquons en passant que E est homéomorphe à $]0; 1]$ via la projection sur le premier axe de coordonnées, et donc que notre espace est juste $]0; 1]$ avec la topologie usuelle mais une distance quelque peu exotique.

2. Il suffit de prendre $\varphi(x) = \pi_1\big(f\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\big)$ et on a

$$f\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \left(\varphi(x), \sin\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)\right).$$

Cette fonction est bien continue puisqu'elle est la composée de deux fonctions continues. L'inégalité

$$|\varphi(x) - \varphi(y)|^2 + \left|\sin\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) - \sin\left(\frac{1}{\varphi(y)}\right)\right|^2 \leq k^2 \left(|x - y|^2 + \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right|^2\right)$$

signifie exactement que f est une contraction.

3. Puisque f est supposée sans point fixe, φ n'en a pas non plus, autrement un point fixe de φ fournit un point fixe de f. Par continuité on a donc $\varphi(x) < x$ ou $\varphi(x) > x$. Comme $\varphi(1) \leq 1$, c'est la première option qui est réalisée est on a bien $\varphi(x) < x$.

L'inégalité précédente implique que $\varphi(x)$ tende vers 0 en 0, elle prend donc les valeurs $\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$ et $\frac{1}{n\pi - \frac{\pi}{2}}$ grâce au théorème des valeurs intermédiaires. D'où l'existence des deux suites de limite nulle (x_n) et (y_n) telles que

$$\sin\left(\frac{1}{\varphi(x_n)}\right) = 1 \text{ et } \sin\left(\frac{1}{\varphi(y_n)}\right) = -1.$$

4. On applique l'inégalité de la deuxième question aux suites de la précédente, il vient

$$|\varphi(x_n) - \varphi(y_n)|^2 + 4 \leq k^2 \left(|x_n - y_n|^2 + \left| \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) - \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) \right|^2 \right)$$

puis

$$|\varphi(x_n) - \varphi(y_n)|^2 + 4 \leq k^2 \left(|x_n - y_n|^2 + 4 \right).$$

En faisant tendre n vers l'infini on obtient

$$4 \leq 4k^2,$$

ce qui est absurde, donc f a un point fixe.

3 Le coin des bèrbères

traité plus tard.