École Normale Supérieure
9 octobre 2018

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\mathrm{o}}$3

1 Mondanités

Exercice 1 : questions diverses

1. La complétude est-elle une notion stable par homéomorphisme ?
2. Si l'on munit $\mathbb{R}$ de la distance $d(x,y) := |\arctan y - \arctan x|$, obtient-on un espace complet ?
3. Soit (X,d) un espace métrique complet. Soit $f : X \to X$ une application continue telle que f^p est contractante pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f admet un unique point fixe.
4. Soit (X_n) une suite d'espaces métriques, on munit $X := \prod_n X_n$ de la distance

$$d(x,y) := \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{d(x_n,y_n)}{1+d(x_n,y_n)}.$$

Montrer que X est complet si et seulement si les X_n sont complets.

Exercice 2 : Exemples d'espaces complets

Pour chacun des espaces métriques suivants, dire s'il est complet. S'il ne l'est pas, en décrire un complété.

(a) L'espace $\mathcal{P}$ des fonctions polynomiales sur $[0;1]$, muni de la norme $||P||_\infty = \sup_{[0;1]} |P(t)|$.

(b) L'espace E_0 des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$, avec la norme $||f||_\infty$.

(c) L'espace E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact, avec la norme $||f||_\infty$.

(d) L'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$ muni de la distance ultramétrique induit par la valuation.

Exercice 3 : anneau des entiers p-adiques

Pour p un nombre premier on note

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \prod_n \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \mid x_{n+1} \equiv x_n \ [p^n]\}$$

l'anneau des entiers p-adiques et on le munit de la distance $d(x,y) := p^{-\nu_p(x-y)}$ où $\nu_p(a)$ est le plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$. Heuristiquement, $\mathbb{Z}_p$ est l'ensemble des entiers avec un développement en base p infini à gauche.

1. Montrer que d induit bien la topologie induite par la topologie produit sur $\mathbb{Z}_p$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est complet et même compact pour la métrique d. Justifier alors l'heuristique.

3. ( ) On note $\mathbb{Q}_p$ le corps des fractions de $\mathbb{Z}_p$, montrer que $\mathbb{Q}_p$ est une complétion de $\mathbb{Q}$

Exercice 4 : complété d'un espace métrique

Soit (X,d) un espace métrique. On note $\mathcal{C}_b(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues et bornées de X dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme.
Soit $x_0 \in X$ quelconque. Pour tout $x \in X$, on définit :

$$f_x : y \in X \to d(y,x) - d(y,x_0).$$

1. a) Montrer que $\mathcal{C}_b(X,\mathbb{R})$ est complet.
b) Montrer que $x \in X \to f_x \in \mathcal{C}_b(X,\mathbb{R})$ réalise une isométrie de X vers son image.
c) En déduire qu'il existe un espace métrique $(\tilde{X},\tilde{d})$ et une application continue $i : X \to \tilde{X}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\tilde{X}$ est complet.

(ii) $i(X)$ est dense dans $\tilde{X}$

(iii) i réalise une isométrie de (X,d) vers $(i(X),\tilde{d})$

2. Montrer que l'espace $(\tilde{X},\tilde{d})$ vérifiant les propriétés de la question précédente est unique à isométrie près.

Exercice 5 : théorème d'Alexandroff-Mazurkiewicz

Soit (X,d) un espace métrique complet et soit A une partie de X. On va montrer l'équivalence suivante :

(1) Il existe une distance d' sur A qui engendre la même topologie que d et pour laquelle (A,d') est complet.

(2) A est une intersection dénombrable d'ouverts de X.

1. a) Sens direct : soit d' une distance complète sur A, induisant la même topologie que la distance d. Montrer qu'on peut supposer d' bornée et A dense dans X.
b) Pour z dans X, on pose

$$f(z) = \sup\left\{\limsup_n d'(x_n,x_{n+1}) \text{ tq } x \in A^{\mathbb{N}} \text{ et } x_n \to z \text{ pour } d\right\}.$$

Montrer que f est bien définie et à valeurs réelles. Montrer que f est continue exactement en les points de A.
c) Conclure le sens (1) $\implies$ (2) en montrant que l'ensemble des points de continuité d'une fonction est une intersection dénombrable d'ouverts.

2. a) Soit U un ouvert de X. On considère d', définie sur U, par

$$d'(x,x') = d(x,x') + \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x')}\right|,$$

où $f(x) = d(x, X-U)$. Montrer que d' est une distance sur U, induisant la même topologie que d. Montrer que (U,d') est un espace métrique complet.

b) Utiliser la question précédente pour construire une métrique complète sur $A = \cap_n U_n$, où $(U_n)_n$ est une famille dénombrable d'ouverts de X.

Exercice 6 : compacts de $\mathbb{R}^n$
On va montrer que l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance de Hausdorff est complet. Soit (K_n) une suite de Cauchy de compacts.

1. Montrer que la suite des distance $d(\bullet, K_n)$ converge uniformément vers une limite $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathbb{L} := \overline{\bigcup} K_n$ est compact. (On pourra montrer qu'il est précompact et fermé)
3. Montrer que $K := \varphi^{-1}(0)$ est un compact inclu dans L et que $K_n \to K$.

2 Autour du théorème du point fixe

Exercice 7 : Un exercice Picard

1. Montrer que l'ensemble des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance de Hausdorff est complet.
2. Soit $f_1, \dots, f_p$ des k-contractions de X. On pose alors, pour $K \subset X$ un compact, $T(X) := \bigcup_1^p f_i(K)$. Montrer qu'il existe un unique compact K tel que $T(K) = K$.
3. Retrouver l'ensemble de Cantor de cette manière pour des fonctions f_1 et f_2 bien choisies, puis le triangle et le tapis de Sierpinski, ...

Exercice 8 : Picard à paramètre
Soit X et Y deux espaces métriques avec X complet et $f : X \times Y \longrightarrow X$ une application continue et k-contractante en X. Montrer que la fonction qui à y associe l'unique point fixe de $f(\bullet, y)$ est continue.

Exercice 9

1. Montrer que la distance $d(x, y) := |\ln(x) - \ln(y)|$ engendre la topologie usuelle sur $\mathbb{R}_+^*$ et en fait un espace complet.
2. Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow]0; +\infty[$ une fonction $\mathcal{C}^1$ et $k \in]0; 1[$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ x|f'(x)| \leq kf(x).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 10 : Un espace non complet vérifiant le théorème du point fixe.
Soit E le graphe de la fonction $s : x \in]0; 1] \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ muni de la distance induite par la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que E n'est pas complet.

Soit $f : E \longrightarrow E$ une k-contraction que l'on suppose sans point fixe.

2. Montrer qu'il existe $\varphi :]0;1] \longrightarrow]0;1]$ continue telle que

$$f\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \left(\varphi(x), \sin\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)\right)$$

et que l'on a pour tout x et y dans $]0;1]$

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|^2 + \left|\sin\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) - \sin\left(\frac{1}{\varphi(y)}\right)\right|^2 \leq k^2 \left(|x-y|^2 + \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right|^2\right).$$

3. Montrer que $\varphi(x) < x$ et qu'il existe deux suites de limite nulle (x_n) et (y_n) telles que

$$\sin\left(\frac{1}{\varphi(x_n)}\right) = 1 \text{ et } \sin\left(\frac{1}{\varphi(y_n)}\right) = -1.$$

4. Conclure.

3 Le coin des bèrbères

Exercice 11 : sur le théorème de Baire

1. [Théorème] Soit (X, d) un espace métrique complet, montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

2. Soit (X, d) un espace métrique complet tel que X est dénombrable (et non-vide). Montrer que X a au moins un point isolé.

3. On dit qu'un espace est de Baire s'il vérifie le théorème de Baire. Montrer qu'un ouvert d'un espace de Baire est de Baire.

4. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x > 0$ on ait $f(nx) \longrightarrow 0$. Montrer alors que f tend vers 0 en l'infini.

5. On dit qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est un G_δ-dense. A-t-on que $\mathbb{Q}$ est un G_δ-dense de $\mathbb{R}$?

Exercice 12 : Théorème de Corominas-Balaguer

On va montrer la surprenante équivalence suivante pour toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x\ \exists n \quad f^{(n)}(x) = 0 \Leftrightarrow \exists n\ \forall x \quad f^{(n)}(x) = 0.$$

1. On pose $F_n := (f^{(n)})^{-1}(0)$, montrer qu'il existe un F_n d'intérieur non vide.

2. Montrer que $x \in \Omega := \bigcup \mathring{F}_n$ si et seulement si f est polynomiale sur un voisinage de x.

3. On suppose par l'absurde que $\Omega \neq \mathbb{R}$, montrer que Ω^c n'a pas de point isolés.

4. Remarquer que l'on peut réappliquer le théorème de Baire au fermé Ω^c et aboutir à une contradiction.