Td n° 3 d'Analyse fonctionnelle

ESPACES L^1 ET L^∞

Séance du 1 mars 2012

Exercice 1. *Théorème de représentation sur* $(L^1)'$

Le but de cet exercice est de montrer que $(L^1)'$ peut être identifié à L^∞. On se donne $\phi \in L^1(\Omega)'$. On veut donc montrer qu'il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ tel que

$$< \phi, f >= \int uf \quad \forall f \in L^1,$$

et de plus $\|u\|_{L^\infty} = \|\phi\|_{(L^1)'}$.

1. On fixe $w \in L^2(\Omega)$ tel que pour tout K compact de Ω, $w \geq \epsilon_K > 0$. Construire u à l'aide de w.

Indication : On pourra utiliser le théorème de représentation dans L^2, et montrer que pour $C > \|\phi\|_{(L^1)'}$,l'ensemble $A = \{x \in \Omega, |u(x)| > C\}$ est négligeable.

2. Attention ! La réciproque est fausse. Construire une forme linéaire sur $(L^\infty)'$ qui ne peut pas se représenter sous la forme $< \phi, f >= \int uf$ avec $u \in L^1$.

⋆

Exercice 2. *Application du théorème de Krein Milman*

Montrer que $L^1([0, 1])$ n'est le dual d'aucun espace vectoriel normé.

⋆

Exercice 3. L^∞ *n'est pas séparable*

1. Soit E un espace topologique. On suppose qu'il existe une famille $(0_i)_{i\in I}$ telle que
- pour tour $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de E,
- $O_i \cap O_j = \varnothing$ si $i \neq j$,
- I n'est pas dénombrable.

Montrer que E n'est pas séparable

2. En déduire que L^∞ n'est pas séparable.

⋆

Exercice 4. *Uniforme intégrabilité*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^1(\Omega)$. On dit que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ tel que

$$mes(A) \leq \delta \Rightarrow (\forall f \in \mathcal{F}, \quad \int_A f \leq \epsilon).$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si et seulement si

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq M\}} |f| \to 0 \text{ quand } M \to +\infty. \tag{1}$$

2. Montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante telle que $g(t)/t \to +\infty$ et

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_\Omega g(|f(x)|)dx < +\infty.$$

⋆

Exercice 5. *Théorème de Dunford-Pettis*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer que pour toute suite $f_n \in L^1(\Omega)$ bornée, on peut en extraire une sous suite qui converge pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ si et seulement si la famille $\{f_n\}$ est équiintégrable.

On considére dans un premier temps une suite de fonctions $f_n \in L^1(\Omega)$ bornée et équiintégrable. On peut supposer $f_n \geq 0$ pour tout n.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose $f_n^k = f_n \chi_{\{f_n \leq k\}}$. Montrer que $\sup_n \|f_n - f_n^k\| \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$.

2. Montrer que pour tout k, on peut extraire de $(f_n^k)_n$ une suite qui converge faiblement pour $\sigma(L^1, L^\infty)$. On note f^k la limite.

3. Montrer que f^k converge fortement dans L^1. On note f sa limite.

Indication : On pourra utiliser le théorème de Beppo-Levi.

4. Montrer que l'on peut extraire de f_n une sous suite qui converge faiblement pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers f.

On montre maintenant la réciproque. Soit f_n une suite de $L^1(\Omega)$ convergeant faiblement vers f. Notons $\mathfrak{X}$ l'ensemble des fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables de Ω. On introduit les ensembles :

$$X_n := \left\{ 1_A \in \mathfrak{X},\ \forall k \geq n,\ \left| \int_A (f_k(x) - f(x))dx \right| \leq \varepsilon \right\}.$$

5. Montrer que $\mathfrak{X}$ et X_n sont des fermés (forts) de L^1.

6. Utiliser le théorème de Baire, et montrer que (f_n) est nécessairement uniformément intégrable.

⋆

Exercice 6. *Limite de produits*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

1. Théorème d'Egorov. Soit $f_n \in L^\infty$ telle que $f_n \longrightarrow f$ presque partout. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une partie mesurable A de Ω telle que $mes(\Omega \setminus A) \leq \epsilon$ et f_n converge uniformément sur A.

Indication : On pourra considérer les $E_{n,k} = \cap_{m \geq n} \{x \in \Omega,\ |f(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{k}\}$.

2. Soient g_n suite bornée de $L^\infty(\Omega)$ telle que $g_n \longrightarrow 0$ presque partout, et f_n suite de $L^1(\Omega)$ telle que $f_n \rightharpoonup f$ dans $\sigma(L^1, L^\infty)$, avec $f \in L^1(\Omega)$. Montrer que $f_n g_n \longrightarrow 0$ fortement dans $L^1(\Omega)$.

⋆