Td n° 3 d'Analyse fonctionnelle

Distributions

Séance du 3 mars 2014

Exercice 1. *L'espace $C^k(\Omega)$*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On munit $C^k(\Omega)$ (ensemble des fonctions k-fois différentiables avec différentielle $k^{\text{iéme}}$ continue), des semi-normes $\|\cdot\|_{m,K}$ pour tout $m \leq k$ (quelconque si $k = \infty$) et pour tout compact $K \subset \Omega$, où

$$\|\phi\|_{m,K} = \sum_{\alpha:|\alpha|\leq m} \|D^\alpha \phi\|_{C^0(K)}.$$

1. Montrer que $C^k(\Omega)$ muni de la topologie $\mathcal{T}$ induite par ces semi-normes est un espace de Fréchet.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $f \in C^k(\Omega)$ non nulle telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda f, 0) < \varepsilon$.

3. En déduire que $\mathcal{T}$ n'est pas normable.

4. Montrer à l'aide du lemme de Baire que l'espace des fonctions continues à support compact $C^0_c(\Omega)$, muni de la topologie induite par les normes $\|\cdot\|_{0,K}$ pour K compact de Ω, est un espace métrisable qui n'est pas complet.

$\star$

Exercice 2. *Partition de l'unité et fonction plateau*

1. Construire une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^∞, telle que $g(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $g(x) = 0$ si $|x| \geq 2$, et $g(x) \in [0, 1]$ pour tout x.

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et V_i une famille d'ouverts telle que $\bigcup_i V_i = \Omega$. Montrer qu'il existe une suite de fonctions $\varphi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ C^∞ positives telle que pour tout n, φ_n est à support dans l'un des V_i, que pour tout $x \in \Omega$,

$$\sum_i \varphi_i(x) = 1,$$

(la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls) et que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=1}^m \varphi_n|_K = 1$.

3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact de U. Montrer qu'il existe une fonction $\psi : U \to \mathbb{R}$ C^∞ à support compact dans U, à valeur dans $[0, 1]$ et telle que pour tout x dans un voisinage de K, $\psi(x) = 1$.

$\star$

Exercice 3. *Support singulier d'une distribution*

Soit Ω un ouvert. On dit qu'une distribution u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est C^∞ sur Ω si il existe $\phi \in C^\infty()$ telle que

$$\forall g \in \mathcal{D}(\Omega), < u, g >=< \phi, g > .$$

Montrer que l'ensemble des ouverts sur lesquels u est C^∞ est stable par réunion. On appelle support singulier de u le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel u est C^∞.

$\star$

Exercice 4. *Quelques exemples de distributions*

1. Montrer que $u : \phi \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \phi^{(i)}(i)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini.

2. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ définie par $u(\phi) = \displaystyle\int \phi(x,x)dx$. Montrer que u est bien une distribution, et calculer $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

3. Montrer que $e^{\frac{1}{x^2}}$ appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_*^+)$, mais ne se prolonge pas à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $v' = u$, et que l'ensemble de telles distributions forme un espace affine.

$\star$

Exercice 5. *Support et ordre*

Soit u l'application linéaire sur $\mathcal{D}(R)$ définie par :

$$u(\phi) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \phi\left(\frac{1}{i}\right) - n\phi(0) - \log(n)\phi'(0) \right).$$

1. Montrer que $u(\phi)$ est bien définie, et que u est une distribution d'ordre au plus 2.

2. Quel est le support S de u ?

3. On considère une suite d'élément ϕ_k de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ satisfaisant $\phi_k \in \mathcal{D}(]\frac{1}{k+1}, 2[)$, $0 \leq \phi_k \leq 1/\sqrt{k}$ et $\phi_k|_{[\frac{1}{k},1]} = 1/\sqrt{k}$. à l'aide des ϕ_k, montrer que quelque soit $p \in \mathbb{N}$, on ne peut obtenir aucune majoration du type : $|u(\phi)| \leq C \sum_{i=0}^{p} \sup_{x\in S} |\partial^i \phi(x)|$.

4. Quel est l'ordre de u ?

Indication : On pourra considérer des fonctions du type $\psi_k = \psi(x) \int_0^x \int_0^y \phi(kt)dtdy$, où $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ d'intégrale 1, et $\psi \in \mathcal{D}(]-1,2[)$ est telle que $\psi(x) = 1$ pour $x \in [0,1]$.

$\star$

Exercice 6. *Distributions qui sont régulières*

1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $1 < p < \infty$. On suppose que :

$$\sup_{\phi\in\mathcal{D}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|T(\phi)|}{\|\phi\|_{L^p}} < \infty.$$

Montrer que T s'identifie à une fonction de L^q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(]0,1[)$, tel que T' s'identifie à une fonction de $L^2(]0,1[)$. Montrer que T s'identifie à une fonction $u \in L^2(]0,1[)$. En déduire que que $u \in C^0([0,1])$.

3. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que T' s'identifie à une fonction f continue. Montrer que T s'identifie à une fonction $g \in C^1$ et que $g' = f$.

4. Soient $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C(\mathbb{R})$, tels que au sens des distributions, on a : $u' + au = f$. Montrer que $u \in C^1(\mathbb{R})$ et donc que l'équation précédente à lieu au sens classique.

$\star$