Analyse fonctionnelle
TD n° 3

Topologies faible et faible-$*$ (1)

Séance du 13 février 2017

Exercice 1. *Échauffement : trois exemples fondamentaux*

Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact.

1. (Évanescence) Montrer que $u_n(x) := \phi(x-n) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

2. (Concentration) Montrer que $v_n(x) := \sqrt{n}\phi(nx) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

Soit $w \in L^2(0, 2\pi)$ une fonction 2π-périodique non constante.

3. (Oscillations) Montrer que $w_n(x) := w(nx) \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ dans $L^2(0, 2\pi)$, mais que cette convergence n'est pas forte.

⋆

Exercice 2. *La topologie faible n'est pas métrisable*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

1. Montrer que tout voisinage faible dans E contient une droite.

2. On suppose que E est métrisable pour la topologie faible. Montrer qu'il existe une suite $\{x_n\} \in E^\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| = n$, et $x_n \rightharpoonup 0$. Conclure grâce au théorème de Baire appliqué dans E^*.

On va maintenant démontrer le même résultat d'une autre manière.

3. (Lemme des noyaux) Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, ψ, des formes linéaires sur E telles que

$$\bigcap_{k=1}^{n} \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi.$$

Démontrer que ψ s'écrit comme une combinaison linéaire des φ_k.

4. On suppose que la topologie faible est métrisable. Montrer qu'il existe alors une famille dénombrable $F \subset E^*$, telle que toute forme linéaire continue sur E s'écrive comme une combinaison linéaire (finie) d'éléments de F. En déduire une contradiction.

⋆

Exercice 3. *Adhérence de la sphère unité pour la topologie faible*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. On va montrer que l'adhérence faible de la sphère unité $S := \{x \in E, \|x\| = 1\}$ est la boule $B := \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$.

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| < 1$. En utilisant la propriété selon laquelle tout voisinage pour la topologie faible contient une droite, montrer que tout voisinage faible contenant x_0 intersecte S.

2. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, montrer que B est fermé pour la topologie faible. Conclure.

⋆

Exercice 4. *Propriété de Schur pour ℓ^1*

On veut démontrer le résultat suivant : dans ℓ^1, les suites convergentes sont les mêmes pour les topologies faible et forte.

1. On commence par un résultat général : soit E un espace de Banach *séparable*. Soit B sa boule unité fermée et B^* la boule unité de E^*. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense de B. Montrer que lorsque l'on pose, pour ℓ, $\ell' \in B^*$,

$$d(\ell, \ell') := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} |(\ell - \ell')(x_n)|,$$

on définit une distance sur B^*, dont la topologie est la topologie faible-$*$ sur B^*, $\sigma(E^*, E)$.

Soit à présent $\{u^n\} = \{(u^n_k)_{k\in\mathbb{N}}\}$ une suite de ℓ^1 convergeant faiblement vers 0.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, $\lim_{n\to\infty} u^n_k = 0$.

3. Soit B^* la boule unité fermée de ℓ^∞, munie de la topologie faible-$*$. Vérifier que cette topologie est bien engendrée par la distance

$$\tilde{d}(v, w) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|v_j - w_j|}{2^j},$$

et que B^* est alors un espace métrique compact.

4. Soit $\varepsilon > 0$. On définit $F_n = \{v \in B^* \mid \forall m \geq n,\ |\langle v, u^m\rangle| \leq \varepsilon\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que F_n contienne un voisinage de 0. Conclure.

5. En combinant ce résultat avec celui de l'exercice précédent, expliquer pourquoi id : $(\ell^1, \sigma(\ell^1, (\ell^1)^*)) \to (\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$ est séquentiellement continue, mais pas continue.

⋆

Exercice 5. *L'application J (suite)*

Soit E un espace vectoriel normé. On définit l'application

$$J : \begin{cases} E \longrightarrow E^{**} \\ x \longmapsto \varphi_x : (E^* \ni \ell \mapsto \ell(x)) . \end{cases}$$

On rappelle (voir TD n° 2) que J réalise un isomorphisme isométrique de E sur son image.

On suppose dorénavant que E est de Banach. Dans ce cas, $J(E)$ est un fermé de E^{**}, et on dit que E est *réflexif* lorsque $J(E) = E^{**}$.

1. On note B_E la boule unité de E. Montrer que E est réflexif si et seulement si B_E est relativement compacte pour la topologie faible.

Indication : On démontrera que $J(B_E)$ est toujours dense dans $B_{E^{**}}$ pour la topologie faible-$*$ $\sigma(E^{**}, E^*)$.

2. Montrer que si E est réflexif, tout sous-espace fermé de E est réflexif.

3. Montrer que si E est réflexif, toute suite bornée de E admet une sous-suite faiblement convergente.

Indication : On pourra admettre le théorème d'Eberlein-Šmulian : dans un Banach, il revient au même d'être relativement faiblement compact et d'être séquentiellement relativement faiblement compact.

⋆