Analyse fonctionnelle
TD n° 3

Théorèmes de Hahn-Banach - Convexité

Séance du 18 février 2019

Exercice 1. *Échauffement : théorème de Hahn-Banach (forme géométrique)*

1. Montrer que dans un espace vectoriel topologique localement convexe séparé E, tout sous-espace F fermé strict dans E est inclus dans un hyperplan fermé.

2. Soit $B := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \forall i \in [\![1, n]\!], |x_i| \leq 1\}$, et $A := \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n ; \forall i \in [\![1, n]\!], |\varepsilon_i| = 1\}$. Montrer que $B = \mathrm{co}(A)$.

⋆

Exercice 2. *Application du critère dual de densité*

1. Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $]-1, 1[$ deux à deux distincts, et tendant vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u^k(n) = (\alpha_k)^n$. Montrer que les suites u^k, pour $k \in \mathbb{N}$, engendrent un sous-espace V dense dans $\ell^p(\mathbb{N})$.

2. Pour $a > 1$, on note $f_a : x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{x-a}$ dans $\mathcal{C}^0([0, 1])$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant $a_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $a_n \to +\infty$. Montrer que $W := \mathrm{Vect}\{f_{a_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

⋆

Exercice 3. *Théorème de Hahn-Banach en dimension finie*

1. Soit $d \geq 1$, C un convexe quelconque de $\mathbb{R}^d$, et $x \in \mathbb{R}^d \setminus C$. Montrer qu'il existe un hyperplan affine fermé séparant x et C au sens large.

Indication : On pourra distinguer le cas $x \notin \overline{C}$ et $x \in \overline{C} \setminus C$. Dans le deuxième cas, on essayera d'approcher x par une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$.

2. Trouver un contre-exemple en dimension infinie.

⋆

Exercice 4. *Espaces L^p, $p \in]0, 1[$*

Soit $p \in]0, 1[$. Sur $L^p([0, 1]) = \{f \text{ mesurable} ; \int_0^1 |f|^p < +\infty\}$, l'application $f \in L^p([0, 1]) \mapsto \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ne définit plus une norme, on introduit donc la distance

$$d(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx.$$

1. Montrer que d définit une distance sur $L^p([0, 1])$.

2. Soit V un voisinage ouvert de 0, que l'on suppose convexe. On veut montrer que $V = L^p([0, 1])$. Soit donc $f \in L^p([0, 1])$, et un entier $n \geq 1$.

(a) Montrer qu'il existe des points $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ tels que :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f|^p = \frac{1}{n} \int |f|^p.$$

(b) On définit $g_i^n(x) := nf(x)\mathbb{1}_{x\in[x_i,x_{i+1}]}$. En utilisant g_i^n, montrer que $f \in V$.

3. En déduire que $L^p([0,1])^* = \{0\}$.

⋆

Exercice 5. *Espaces ℓ^p, $p \in]0,1[$*

Soit $p \in]0,1[$. On s'intéresse à l'espace $\ell^p(\mathbb{N}) = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}; \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p < +\infty\}$. Pour $p < 1$, l'application $u \in \ell^p(\mathbb{N}) \mapsto (\sum |u_n|^p)^{1/p} \in \mathbb{R}_+$ ne définit plus une norme. On définit donc une distance d sur $\ell^p(\mathbb{N})$ de la façon suivante : pour $u, v \in \ell^p(\mathbb{N})$,

$$d(u,v) := \sum_n |u_n - v_n|^p.$$

1. Montrer que d munit $\ell^p(\mathbb{N})$ d'une structure d'espace vectoriel métrique complet.

2. Soit $q \in]1 - 1/p, 0[$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on introduit la suite u^k définie par $u^k(n) = \delta_{k,n}(1+k)^q$. On note $K = \{0, u^0, u^1, u^2, \dots\}$. Montrer que K est compact, mais que son enveloppe convexe n'est pas bornée. Montrer que $(\ell^p(\mathbb{N}), d)$ n'est pas localement convexe.

3. Montrer que $(\ell^p(\mathbb{N}))^* = \ell^\infty(\mathbb{N})$.

⋆

Exercice 6. *Limite de Banach*

On se place dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Soit S_g l'opérateur de décalage à gauche : $S_g(u_0, u_1, u_2, \dots) := (u_1, u_2, \dots)$. Le but de cet exercice est de démontrer l'existence d'une forme linéaire continue Λ sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$, appelée *limite de Banach*, qui satisfait les deux conditions suivantes :

$$\Lambda S_g u = \Lambda u$$
$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \le \Lambda u \le \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$

En particulier, si u converge, $\Lambda u = \lim u$.

1. Pour $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on définit les formes moyennes suivantes :

$$\Lambda_n(u) = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

Soit $p : u \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mapsto \limsup_{n\to+\infty} \Lambda_n(u)$. Montrer que p est bien définie et satisfait $p(u+v) \le p(u) + p(v)$ pour tout $u, v \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, et $p(\lambda u) = \lambda p(u)$ pour tout $\lambda \ge 0$.

2. Prouver l'existence de la limite de Banach. On pourra introduire l'espace des suites Cesarò-convergentes.

3. La limite de Banach est-elle unique ?

⋆

Exercice 7. *Adhérence de la sphère unité pour la topologie faible*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. On va montrer que l'adhérence faible de la sphère unité $S := \{x \in E, \|x\| = 1\}$ est la boule $B := \{x \in E, \|x\| \le 1\}$.

1. Montrer que la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ est séparée.

2. Montrer que tout voisinage pour la topologie faible de E contient une droite.

3. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| < 1$. Montrer que tout voisinage faible contenant x_0 intersecte S.

4. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, montrer que B est fermé pour la topologie faible. Conclure.

⋆