Corrigé – TD 3
Fonctions mesurables

Exercice -1.

1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe O_ϵ un ouvert dense de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue) $\lambda(O_\epsilon) \leq \epsilon$.
2. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe F_ϵ un fermé d'intérieur vide tel que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$$\lambda(A \cap F_\epsilon) \geq \lambda(A) - \epsilon.$$

Corrigé :

1. Soit $\epsilon > 0$. Notons $\mathbb{Q} = \{q_n, n \geq 1\}$ les rationnels et posons:
$$O_\epsilon = \bigcup_{n\geq 1} \left]q_n - \epsilon 2^{-n-1}, q_n + \epsilon 2^{-n-1}\right[.$$
Alors O_ϵ est un ouvert de $\mathbb{R}$, dense (car il contient $\mathbb{Q}$). De plus,
$$\lambda\left(O_\epsilon\right) \leq \sum_{n\geq 1} \lambda\left(\left]q_n - \epsilon\, 2^{-n-1}, q_n + \epsilon\, 2^{-n-1}\right[\right) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\epsilon = \epsilon.$$
2. Posons $F_\epsilon = O_\epsilon^c$. Alors F_ϵ est un fermé de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide. De plus, pour tout $A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$, on a
$$\lambda\left(A\right) = \lambda\left(A \cap F_\epsilon\right) + \lambda\left(A \cap O_\epsilon\right) \leq \lambda\left(A \cap F_\epsilon\right) + \lambda\left(O_\epsilon\right) \leq \lambda\left(A \cap F_\epsilon\right) + \epsilon.$$

Exercice 0 (Ensembles de Cantor)**.**
Soit $(d_n, n \geq 0)$ une suite d'éléments de $]0,1[$, et soit $K_0 = [0,1]$. On définit une suite $(K_n, n \geq 0)$ de la façon suivante : connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de chaque intervalle, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K = \bigcap_{n\geq 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.
2. Calculer la mesure de Lebesgue de K.

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

3. On note K_3 l'ensemble de Cantor obtenu en posant $d_n = \frac{1}{3}$ pour tout n. Vérifier que

$$K_3 = \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{3^n} \ ; \ (a_n) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

et qu'il est de mesure de Lebesgue nulle.

Corrigé :

1. Chaque ensemble K_n est fermé donc K est fermé. De plus, $K \subset [0,1]$ donc K est compact. Montrons que l'on peut construire une bijection $\varphi : K \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Si x est dans K, alors x est dans un des deux intervalles composant K_1. On pose $\varphi(x)_0 = 0$ si x est dans l'intervalle de gauche et $\varphi(x)_0 = 1$ si x est dans l'intervalle de droite. En répétant ce procédé, on construit une suite $\varphi(x) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On vérifie facilement que φ est une bijection. Ainsi, K n'est pas dénombrable. Par construction de φ, pour tous $x, y \in K$ et $n \geq 0$, x et y sont dans le même intervalle composant K_{n+1} si et seulement si $\varphi(x)_k = \varphi(y)_k$ pour tout $k \leq n$. Supposons qu'il existe un intervalle I de $[0,1]$ inclus dans K et non réduit à un point. Soient $x, y \in I$ tels que $x \neq y$. Alors, pour tout $n \geq 0$, x et y sont dans le même intervalle composant K_n donc $\varphi(x) = \varphi(y)$ ce qui est absurde. Ainsi, K est d'intérieur vide. Enfin, soit $x \in K$. L'ensemble $\{y \in K : \varphi(y)_k = \varphi(x)_k \ \forall k \leq n\}$ est infini et est constitué de points de K tous à distance au plus $1/2^{n+1}$ de x. Donc x est un point d'accumulation.

2. On montre par récurrence que $\lambda(K_n) = (1 - d_0) \dots (1 - d_{n-1})$. Or $\lambda([0,1]) = 1$ donc $\lambda(K) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n)$. On a donc:

$$\sum_{n \geq 0} d_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \lambda(K) = \prod_{n \geq 0} (1 - d_n),$$
$$\sum_{n \geq 0} d_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lambda(K) = 0.$$

3. Il suffit de regarder la bijection construite dans la question 1 entre K et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et vérifier que si $x = \varphi^{-1}((b_n)_n)$, alors $x = \sum \frac{2b_n}{3^n}$. Pour la mesure on utilise la question 2.

Exercice 1 (Petites questions)**.**
1) Soit $f\colon \ ]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pourquoi la fonction dérivée f' est-elle mesurable?

2) Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable et $(f_n\colon E \to \overline{\mathbb{R}})_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble des x tels que $(f_n(x))_{n\geq 1}$ admette une limite finie est mesurable.

INDICATION: Pensez au critère de Cauchy.

Corrigé : 1) Pour $x \in]0,1[$,

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n},$$

ainsi f' est mesurable comme une limite simple de fonctions mesurables.

2) Écrivons le critère de Cauchy :

$$\begin{aligned}(f_n(x))_{n\geq 1} \text{ converge} \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \geq N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \\ &\iff \quad x \in \bigcap_{\varepsilon>0} \left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n,m\geq N} \{x \in E, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\} \right)\right)\end{aligned}$$

Donc, l'ensemble considéré est

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n,m\geq N} \{x \in E, |f_n(x) - f_m(x)| \leq 1/k\} \right)\right),$$

qui s'obtient par un nombre dénombrable d'opérations élémentaires sur des ensembles mesurables.

Exercice 2 (Tribu engendrée par des fonctions)**.** Soit $f\colon X \to Y$ une application. Soient $\mathcal{F}$ une tribu sur X et $\mathcal{G}$ une tribu sur Y.

1. Montrer que $\{B \subset Y; f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur Y. Elle est appelée *tribu image par f*.

2. On note $\sigma(f)$ la plus petite tribu sur X qui rende $f\colon X \to (Y, \mathcal{G})$ mesurable. Elle est appelée *tribu engendrée par f*.

   (a) Montrer que $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{G}\}$.

   (b) Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$. Alexandra dit : alors nécessairement, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$. A-t-elle raison ?

3. Montrer que toute fonction $g\colon (X, \sigma(f)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable s'écrit $g = \varphi \circ f$ avec $\varphi\colon (Y, \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

4. (EXEMPLE.) Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$.

   (a) Montrer que $\sigma(f) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A\}$.

   (b) Déterminer l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \sigma(f))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

5. Soit $(Y_i, \mathcal{B}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces mesurables, et soient $f_i\colon Y \to Y_i$, $i \in I$ des fonctions. On note $\sigma(f_i, i \in I)$ la tribu engendrée par la famille de fonctions $(f_i)_{i\in I}$, i.e. la plus petite tribu sur Y rendant les f_i mesurables.

   (a) Prouver que $\sigma(f_i, i \in I) = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)\right)$.

   (b) Montrer que $f\colon (X, \mathcal{F}) \to (Y, \sigma(f_i, i \in I))$ est mesurable si, et seulement si, pour tout $i \in I$, l'application $f_i \circ f\colon (X, \mathcal{F}) \to (Y_i, \mathcal{B}_i)$ est mesurable.

Corrigé :

1. Il s'agit d'une simple vérification des trois points de la définition d'une tribu.

2. (a) Il est clair que $f^{-1}(\mathcal{G}) \subset \sigma(f)$. Le fait que $f^{-1}(\mathcal{G})$ est une tribu implique le résultat voulu.

(b) Alexandra a raison. Montrons la double inclusion. Tout d'abord, il est clair que $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$, ce qui implique que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$. Ensuite, notons

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y; f^{-1}(B) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))\}.$$

Comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on en déduit que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ est une tribu. Il s'ensuit que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) \subset f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$, ce qui clôt la preuve.

3. Soit $g\colon (X, \sigma(f)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable et étagée, $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{A_i}$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $A_i \in \sigma(f)$. Comme A_i appartient à la tribu réciproque de f, il existe $B_i \in \mathcal{G}$ tel que $A_i = f^{-1}(B_i)$. Et donc

$$g = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{B_i}}_{\text{mesurable } (Y,\mathcal{G}) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))} \circ f\,.$$

Traitons maintenant le cas général : g s'écrit comme limite simple de fonctions étagées $g = \lim e_n$. Donc si l'on écrit $e_n = \varphi_n \circ f$ on obtient $g = \lim \varphi_n \circ f$ avec $\varphi_n\colon (Y, \mathcal{G} \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. Si l'on pose

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lim \varphi_n(x) \text{ quand la limite existe,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors $\varphi = \mathbf{1}_{|\limsup_{n\to\infty} \varphi_n| < \infty} \limsup_{n\to\infty} \varphi_n$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables (avec la convention $0 \times \infty = 0$), et de plus $g = \varphi \circ f$.

4. (a) Ceci provient aisément du fait que $f^{-1}(A) = \sqrt{A \cap \mathbb{R}_+} \cup (-\sqrt{A \cap \mathbb{R}_+})$ pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   (b) D'après la question 3. ce sont les fonctions de la forme $\varphi(x^2)$ avec $\varphi\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

5. (a) La plus petite tribu sur Y rendant les f_i mesurables contient forcément $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$, de sorte que

$$\sigma(f_i; i \in I) \supset \sigma\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)\right).$$

   Pour l'autre inclusion, il suffit de remarquer que $\sigma\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)\right)$ rend mesurables les f_i.

   (b) Tout d'abord, si $f\colon (X, \mathcal{F}) \to (Y, \sigma(f_i, i \in I))$ est mesurable, alors $f_i \circ f$ est mesurable comme composée de fonctions mesurables. Réciproquement, supposons que toutes les fonctions $f_i \circ f$ soient mesurables. D'après la question précédente, pour montrer que f est mesurable, il suffit de montrer que si $B \in \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$ alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Soit donc $B \in \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$. Il existe donc $i \in I$ et $B_i \in \mathcal{B}_i$ tels que $B = f_i^{-1}(B_i)$. Mais alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(f_i^{-1}(B_i)) = (f_i \circ f)^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$, ce qui conclut.

Exercice 3 (Tribu de Baire)**.** Soit E un ensemble non-vide muni d'une topologie $\mathscr{T}$. La *tribu de Baire* associée à $\mathscr{T}$, notée $\mathrm{Baire}(E)$, est définie comme la tribu engendrée par les fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que sur un espace métrique (E, d), on a $\mathrm{Baire}(E) = \mathcal{B}(E)$.

Corrigé : Il est clair que $\mathrm{Baire}(E) \subset \mathcal{B}(E)$. Pour l'autre inclusion, il suffit de montrer que tout fermé F dans E appartient à la tribu de Baire. Pour cela, on définit pour tout $x \in E$ sa distance à F

$$f(x) := d(x, F) := \inf\{d(x, y) \colon y \in F\}.$$

Alors pour tous $x, u \in E$, $|d(x, F) - d(u, F)| \leq d(x, u)$, ce qui implique que f est continue. Or $F = f^{-1}(\{0\})$ car F est fermé. Donc $F \in \mathrm{Baire}(E)$.

Exercice 4 (Tribus produits)**.** Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ la tribu notée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ définie par$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\})$. On note $\pi_X \colon X \times Y \to X$ et $\pi_Y \colon X \times Y \to Y$ les projections canoniques sur X et Y.

1. Prouver que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\pi_X, \pi_Y)$, autrement dit que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la plus petite tribu rendant π_X et π_Y mesurables.

2. Soit $f \colon (E, \mathscr{E}) \to (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ une application. On écrit $f(z) = (f_X(z), f_Y(z))$. Prouver que f est $(\mathscr{E}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ mesurable si et seulement f_X et f_Y sont respectivement $(\mathscr{E}, \mathcal{A})$ et $(\mathscr{E}, \mathcal{B})$ mesurables.

3. Prouver que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pourra admettre que si $\mathcal{O}\left(\mathbb{R}^2\right)$ désigne l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathcal{O}\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i ;\, U_i, V_i \text{ ouverts de } \mathbb{R}, I \text{ dénombrable} \right\}.$$

Corrigé :

1. D'après la question 5(a) de l'exercice 2, $\sigma(\pi_X, \pi_Y) = \sigma(\{A \times Y, X \times B\}, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B})$. Il est clair que

$$\sigma(\{A \times Y, X \times B\}, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}) \subset \sigma(\{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

   Pour l'autre inclusion, il suffit de remarquer que pour $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$ on a $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$.

2. C'est une conséquence de la question 5(b) de l'exercice 2.

3. On établit la double inclusion. Montrons tout d'abord que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Pour tous ouverts O, O' de $\mathbb{R}$, $O \times O'$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Ensuite, considérons la classe G_1 définie par:

$$G_1 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \text{ pour tout ouvert } B \text{ de } \mathbb{R}\}.$$

   Il est facile de voir que G_1 est une tribu. Comme G_1 contient les ouverts de $\mathbb{R}$, $G_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ensuite, on considère la classe G_2 définie par:

$$G_2 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

   Il est facile de voir que G_2 est une tribu. D'après ce qu'on a fait précédemment, G_2 contient les ouverts de $\mathbb{R}$, et donc $G_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ainsi, $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, et donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Réciproquement, montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. D'après le résultat admis, comme $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right) = \sigma\left(\mathcal{O}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$, il suffit de montrer que si I est dénombrable et U_i, V_i ($i \in \mathbb{R}$) sont des ouverts de $\mathbb{R}$, alors

$$\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ceci est clairement le cas, car $U_i, V_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et I est **dénombrable**.

Remarque. Cette preuve montre que $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ lorsque X et Y sont deux espaces topologiques à base dénombrable d'ouverts.

Exercice 5. Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f\colon (E, \mathscr{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

a) Montrer que si $\mu(E) \neq 0$, il existe $A \in \mathscr{E}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f soit bornée sur A.

b) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathscr{E}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ soit minorée sur A par une constante strictement positive.

Corrigé :

a) Soit $A_n = \{|f| \leq n\}$ (de manière plus formelle, $A_n = \{x;\, |f(x)| \leq n\}$), qui est mesurable. Il est clair que A_n est une suite croissante d'ensembles et que $\cup_{n \geq 1} A_n = E$. Ainsi,

$$\lim_{n \to \infty} \mu\left(A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \mu(E) > 0.$$

Il existe donc $n \geq 1$ tel que $\mu(A_n) > 0$, ce qui conclut.

b) Soit $A_n = \{|f| \geq 1/n\}$ (de manière plus formelle, $A_n = \{x;\, |f(x)| \geq 1/n\}$), qui est mesurable. Il est clair que A_n est une suite croissante d'ensembles et que $\cup_{n \geq 1} A_n = \{f \neq 0\}$. Ainsi,

$$\lim_{n \to \infty} \mu\left(A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \mu(\{f \neq 0\}) > 0.$$

Il existe donc $n \geq 1$ tel que $\mu(A_n) > 0$, ce qui conclut.

Exercice 6 (Théorème d'Egoroff)**.** Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions réelles mesurables sur E et f une fonction réelle mesurable sur E telles que $f_n \to f$ μ-presque partout quand $n \to \infty$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $\eta > 0$ il existe $n \geq 1$ tel que

$$\mu\biggl(\bigcup_{j \geq n} \Bigl\{x \in E\colon |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\Bigr\}\biggr) \leq \eta.$$

2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathscr{E}$ de mesure $\mu(A) \leq \varepsilon$ tel que $f_n \to f$ uniformément sur $E \setminus A$.

3. Donner un contre-exemple à ce résultat si l'on suppose que $\mu(E) = \infty$.

Corrigé :

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge μ-p.p. vers f ce qui implique que pour tout $k \geq 1$,
$$\mu\Big(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{j\geq n}\Big\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\Big\}\Big) = 0.$$
Pour tout $k \geq 1$, la suite $(\bigcup_{j\geq n}\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\})_{n\geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion et $\mu(E) < \infty$ donc
$$\mu\Big(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{j\geq n}\Big\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\Big\}\Big) = \lim_{n\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{j\geq n}\Big\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\Big\}\Big).$$
Ainsi
$$\lim_{n\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{j\geq n}\Big\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\Big\}\Big) = 0,$$
et l'on obtient le résultat.

2. Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la question (1), pour tout $k \geq 1$, on peut trouver $n_k \in \mathbb{N}$ tel que
$$\mu\Big(\bigcup_{j\geq n_k}\Big\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\Big\}\Big) \leq 2^{-k}\varepsilon.$$
Posons
$$A = \bigcup_{k\geq 1}\bigcup_{j\geq n_k}\Big\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\Big\}.$$
Alors $\mu(A) \leq \varepsilon$ et sur $E \setminus A$, $f_n \to f$ uniformément quand $n \to \infty$.

3. On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1} = (\mathbf{1}_{[-n,n]})_{n\geq 1}$. Alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure finie tel que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge sur B uniformément vers $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$. Alors $\lambda(\mathbb{R} \setminus B) = +\infty$, ce qui implique que $\mathbb{R} \setminus B$ contient des réels arbitrairement grands en valeur absolue et donc qu'on ne peut pas avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R} \setminus B$. Le théorème d'Egoroff ne peut donc pas être démontré si l'on ne suppose pas $\mu(E) < \infty$.

Exercice 7 (Classe monotone, version fonctionnelle)**.** Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable. Soit $\mathscr{P}$ un pi-système sur E tel que $\sigma(\mathscr{P}) = \mathscr{E}$. Soit $\mathscr{H}$ un ensemble d'applications de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'ensemble de fonctions $\mathscr{H}$ satisfait les propriétés suivantes.

1. $\mathscr{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (il contient donc la fonction nulle).

2. Pour tout $A \in \mathscr{P}$, on a $\mathbf{1}_A \in \mathscr{H}$.

3. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{H}$ et $M \in \mathbb{R}_+$ sont tels que $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq M$ pout tout n, alors $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathscr{H}$.

Montrer que $\mathscr{H}$ contient toutes les fonctions réelles $\mathscr{E}$-mesurables bornées.

Corrigé : Voir le polycopié de cours.

Exercice 8. Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on note $N(y) \in \overline{\mathbb{R}}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$. Montrer que N est une fonction mesurable.

Corrigé : L'équation $f(x) = y$ possède une solution dans $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$ si

$$y \in f([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[).$$

Puisque f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que $f([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[)$ est un intervalle et est donc mesurable. Ainsi la suite de fonctions

$$N_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbf{1}_{y \in f([k2^{-n},(k+1)2^{-n}[)} + \mathbf{1}_{y=f(1)},$$

est mesurable est tend en croissant vers N qui est donc mesurable.

Exercice 9.

1. On munit $\mathbb{R}$ de la distance discrète définie par $d(x,y) = \mathbf{1}_{x \neq y}$. Quelle est alors la tribu borélienne ? Est-ce que les tribus engendrées par les boules ouvertes et les boules fermées sont la tribu borélienne ?

2. Soient $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable, (X,d) un espace métrique et $f_n\colon (E,\mathscr{E}) \to (X, \mathcal{B}(X))$, $n \geq 1$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que pour tout $x \in E$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $f\colon (E,\mathscr{E}) \to (X,\mathcal{B}(X))$ est mesurable.

Corrigé :

1. La tribu borélienne est toutes les parties de $\mathbb{R}$. En revanche, les tribus engendrées par les boules ouvertes ou fermées sont la tribu $\{A \subset \mathbb{R};\ A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$, qui est bien différente de la tribu borélienne.

2. Il suffit de montrer que $f^{-1}(F)$ est mesurable pour tout fermé F. On rappelle que la distance à un fermé est une application 1-lipschitzienne (c'est-à-dire que $x \mapsto d(x,F)$ est 1-lipschitzienne) et que $x \in F$ ssi $d(x,F) = 0$. On écrit alors:

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= \{x \in X; d(f(x),F) = 0\} = \Big\{x \in X;\ \lim_{n\to\infty} d(f_n(x),F) = 0\Big\} \\ &= \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \Big\{x \in X; d(f_n(x),F) \leq \frac{1}{k}\Big\}, \end{aligned}$$

qui est mesurable comme unions et intersections dénombrables d'ensembles mesurables. En effet, $x \mapsto d(f_n(x),F)$ est mésurable, étant la composée de la fonction mesurable f_n par la fonction 1-lipschitzienne $y \mapsto d(y,F)$.

ATTENTION: Il ne suffit pas de montrer que les images réciproques des boules (ouvertes ou fermées) sont mesurables. En effet, ce n'est que dans un espace métrique **séparable** qu'on peut affirmer que la tribu engendrée par les boules est la tribu borélienne (cf question a)).

Exercice 10. ($\star$) Soit $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est linéaire.

On pourra admettre le résultat suivant (THÉORÈME DE LUSIN, prouvé ultérieurement): si une fonction $g\colon ([a,b], \mathcal{B}([a,b])) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K_\epsilon \subset [a,b]$ tel que $\lambda([a,b] \cap K_\epsilon^c) \leq \epsilon$ et la restriction de g à K_ϵ est continue.

Corrigé : Il est clair que $f(0) = 0$. Il suffit de prouver que f est continue en 0 (f sera alors continue sur tout $\mathbb{R}$ et donc linéaire). Soit $\epsilon > 0$. D'après le théorème de Lusin, il existe un compact $K \subset [0,1]$ tel que $\lambda(K) > 2/3$ et sur lequel f est continue. Puisque f est alors uniformément continue sur K, il existe $\delta \in (0, 1/3)$ tel que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ dès que $|x - y| \leq \delta$. Soit $h \in (0, \delta)$. Alors les ensembles K et $K - h = \{x - h;\, x \in K\}$ ne sont pas disjoints. En effet, dans le cas contraire, on aurait:

$$1 + h = \lambda([-h, 1]) \geq \lambda(K \cup (K - h)) = \lambda(K) + \lambda(K - h) > 4/3,$$

ce qui contredit le fait que $h < \delta < 1/3$. Il existe donc $x_0 \in K \cap (K - h)$, ce qui implique que $|f(x_0) - f(x_0 + h)| < \epsilon$, et donc $|f(h)| < \epsilon$.

Exercice 11. ($\star$) Est-ce que $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ pour tous espaces métriques X, Y?

Corrigé : La réponse est non. Prenons $X = Y = (l^\infty(\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$, c'est-à-dire l'espace métrique des suites bornées indexées par $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie.

Lemme. Soit U un ensemble mesurable de $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$. Alors il existe des ensembles mesurables $(A_i, B_i)_{i \in \mathbb{R}}$ tels que

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{R}} A_i \times B_i.$$

Preuve. Si U est un ensemble mesurable de $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X) = \sigma(A \times A';\, A, A' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, d'après la question 3 de l'exercice 4 (TD2), il existe une suite $(A_m)_{m \geq 0}$ d'ensembles mesurables tels que $U \in \sigma\big((A_m \times A_n)_{m,n \geq 0}\big)$. Maintenant, pour une suite $\underline{x} = (x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, posons

$$B_{\underline{x}} = \bigcap_{n \geq 0} C_n,$$

où $C_n = A_n$ si $x_n = 1$ et $C_n = A_n^c$ si $x_n = 0$. Mais l'ensemble des éléments qui s'écrivent comme union des ensembles de la forme $B_{\underline{x}} \times B_{\underline{x'}}$ est une tribu (le vérifier !!) contenant U (car il contient les $A_i \times A_j$). On en tire:

$$U = \bigcup \left\{ B_{\underline{x}} \times B_{\underline{x'}};\, B_{\underline{x}} \times B_{\underline{x'}} \subset U \right\}.$$

Ceci achève la preuve du lemme, car $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ sont en bijection. $\square$

Revenons à la preuve de l'exercice. La diagonale $\Delta = \{(x,x)\,;\, x \in l^\infty(\mathbb{R})\}$ est un ensemble fermé dans $X \times X$. Elle est donc dans $\mathcal{B}(X \times X)$. Supposons par l'absurde que $\Delta \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$. D'après le lemme, il existe une suite $(A_i, B_i)_{i \in \mathbb{R}}$ telle que

$$\Delta = \bigcup_{i \in \mathbb{R}} A_i \times B_i.$$

Comme $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ s'injecte dans l^∞, il existe $i \in \mathbb{R}$ et deux éléments distincts $(u,u),(v,v) \in \Delta$ tels que $(u,u),(v,v) \in A_i \times B_i$ (sinon, il existerait une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$). Mais alors $(u,v) \in A_i \times B_i$, ce qui implique $(u,v) \in \Delta$. Absurde car $u \neq v$.

Remarque. Une preuve similaire montre que si X est un espace topologique séparé dont le cardinal est strictement plus grand que celui de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{B}(X \times X) \neq \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$. Voir le Lemme 6.4.3 du livre Measure Theory Vol. II de V. I. Bogachev.