PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 3
PROCESSUS DE POISSON - CONDITIONNEMENT GAUSSIEN

Correction des exercices 2, 4, 5, 6 et 8 : Voir le chapitre 10 de :

`http://www.unige.ch/math/folks/velenik/Cours/2011-2012/ProbaStat/probastat.pdf`

Exercice 1 (Sans Calcul)**.**
Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.$$

Correction : On a

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(P_1+\ldots+P_n\leq n),$$

où $P_1,\ldots,P_n$ sont des variables aléatoires de Poisson de paramètre 1 indépendantes. Et

$$\mathbb{P}(P_1+\ldots+P_n\leq n) = \mathbb{P}\left(\frac{P_1+\ldots+P_n-n}{\sqrt{n}}\leq 0\right).$$

La variance d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ étant égale à λ, on a d'après le TCL,

$$\frac{P_1+\ldots+P_n-n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{(loi)}}{\longrightarrow}} N,$$

où N est une variable gaussienne (centrée réduite). Or la fonction de répartition de N est continue donc

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(N\leq 0) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2 (Calculs classiques)**.**
Recalculer les propriétés classiques des processus de Poisson :

1. Soient $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(M_t)_{t\geq 0}$ deux processus de Poisson indépendants de paramètres λ et μ. Montrer que $(N_t+M_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p et $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre λ. On définit les processus $(P_t)_{t\geq 0}$ et $(F_t)_{t\geq 0}$:

$$P_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \ \text{ et } \ F_t = \sum_{i=1}^{N_t}(1-X_i).$$

Montrer que P_t et F_t sont deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs $p\lambda$ et $(1-p)\lambda$.

Exercice 3. Soit $X=(X_1,X_2,X_3)$ un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. La variable X a-t-elle une densité ?

2. Calculer $\mathbb{E}[X_1|X_2]$ et $\mathbb{E}[X_1|X_2, X_3]$.

3. Calculer $\mathbb{E}[e^{i\xi X_1}|X_2]$ et $\mathbb{E}[e^{i\xi X_1}|X_2, X_3]$.

Correction :

1. Soient C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de la matrice C. On remarque que $2C_1 - C_2 + C_3 = 0$, donc la matrice C n'est pas inversible, le vecteur gaussien n'a pas de densité. De plus, cela nous permet de dire que $2X_1 - X_2 + X_3 = 0$ p.s.

2. On veut écrire $X_1 = aX_2+(X_1-aX_2)$ en choisissant le réel a de telle façon que (X_1-aX_2) est indépendant de X_2. Il suffit de vérifier que $\text{Cov}((X_1 - aX_2), X_2) = 0$, et il faut prendre $a = \frac{2}{5}$. Donc $\mathbb{E}[X_1|X_2] = \frac{2}{5}X_2$. Ensuite, dans la question précédente on a trouvé que $2X_1 - X_2 + X_3 = 0$ p.s. donc $X_1 = \frac{X_2-X_3}{2}$ et $\mathbb{E}[X_1|X_2, X_3] = \frac{X_2-X_3}{2}$.

3. On a écrit $X_1 = aX_2+(X_1-aX_2)$ où aX_2 est $X-2$-mesurable et X_1-aX_2 est une variable gaussienne indépendante de X_2 de variance $2 - 4a + 5a^2 = \frac{6}{5}$. Donc

$$\mathbb{E}[e^{i\xi X_1}|X_2] = \mathbb{E}[e^{i\xi\frac{2}{5}X_2}e^{i\xi(X_1-\frac{2}{5}X_2)}|X_2] = e^{i\xi\frac{2}{5}X_2}e^{-\frac{1}{2}\frac{6}{5}\xi^2}.$$

La deuxième formule est encore plus facile : $\mathbb{E}[e^{i\xi X_1}|X_2, X_3] = e^{i\xi\frac{X_2-X_3}{2}}$.

Exercice 4 (Paradoxe de l'autobus)**.**
Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson standard (d'intensité 1). On note $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ les sauts du processus. Pour $t \geq 0$ on pose

$$Z_t = t - T_{N_t} \ \text{ et } \ W_t = T_{N_t+1} - t.$$

1. Calculer la loi du couple (Z_t, W_t). En particulier montrer que
   (a) les variables Z_t et W_t sont indépendantes,
   (b) la variable W_t suit une loi $\mathcal{E}(1)$,
   (c) on a $Z_t = \min(t, \mathcal{E}(1))$ en loi.

2. Montrer que Z_t converge en loi vers une variable exponentielle de paramètre 1.

3. Calculer $\lim_{t\to\infty} E[W_t + Z_t]$. Interpréter.

Exercice 5.
Soient $U_1, U_2, ..., U_n$ des variables i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$.

1. Montrer que $n \min_{1\leq i\leq n} U_i$ converge en loi vers $\mathcal{E}(1)$.

2. Montrer que $n^2 \min_{i,j} |U_i - U_j|$ converge en loi (et déterminer sa limite).

Exercice 6 (Processus de Poisson non-homogène)**.**
Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}+, \mathcal{B}(\mathbb{R}+))$, σ-finie. On dit que $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité μ si c'est un processus càdlàg, croissant, à valeurs dans les entiers, à accroissements indépendants et tel que our tous $t > s \geq 0$, $(N_t - N_s) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{P}(\mu(]s, t]))$.

1. Montrer qu'un tel processus existe.

2. Que dire si μ est la mesure de Lebesgue ?

3. Soient μ et μ' deux mesures σ-finie, N_t et N'_t des processus de Poisson indépendants d'intensités respectives μ et μ'. Montrer que $(N_t + N'_t)_t$ est un processus de Poisson d'intensité $\mu + \mu'$.

4. Montrer qu'il existe un processus de Poisson homogène $(M_s)_{s\geq 0}$ et une fonction $f : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+$ croissante tels que $N_t = M_{f(t)}$ p.s.

5. ($\star$) Est-il possible détendre cette construction pour les mesures signées ?

Exercice 7 (File d'attente). ($\star$)
On considère un file d'attente avec un seul guichet : les clients entrent selon un processus de Poisson d'intensité λ, et les temps de service des clients sont iid de loi $\mathcal{E}(\mu)$, $\mu > \lambda$. On note Q_t la longueur de la queue à l'instant t. On considère que le système est dans son régime stationnaire, c'est-à-dire que pour tous t, s, $Q_t \overset{\mathcal{L}}{=} Q_s$, ou encore que la queue vue par le n-ème client lorsqu'il entre dans le magasin a la même loi que la queue vue par le $(n+1)$-ème. Calculer cette loi.

Correction : Vous verrez les files d'attentes quand vous ferez les chaînes de Markov. Si vous voulez la solution maintenant, venez me voir dans le bureau V2.

Exercice 8.
Un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ d'intensité λ vérifie les trois propriétés suivantes :

- c'est un processus de comptage, $i.e.$ part de 0, est croissant et ne fait que des sauts de taille 1 en restant continu à droite,
- à accroissements stationnaires de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, $i.e.$ pour tout $t, s \geq 0$ on a $N_{t+s} - N_t \overset{\mathcal{L}}{=} N_s \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{P}(s\lambda)$ en loi,
- et à accroissements indépendants, $i.e.$ pour tout $t, s \geq 0$ la variable $N_{t+s} - N_t$ est indépendante de $(N_u)_{u\leq t}$.

1. Montrer que réciproquement, un processus qui vérifie les trois propriétés ci-dessus est un processus de Poisson d'intensité λ.

2. ($*$) Montrer que tout processus de comptage à accroissements indépendants stationnaires (pas forcément poissoniens !) est en réalité un processus de Poisson.