PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 3
PROCESSUS DE POISSON - CONDITIONNEMENT GAUSSIEN

Exercice 1 (Sans Calcul)**.**
Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Exercice 2 (Calculs classiques)**.**
Recalculer les propriétés classiques des processus de Poisson :

1. Soient $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(M_t)_{t\geq 0}$ deux processus de Poisson indépendants de paramètres λ et μ. Montrer que $(N_t + M_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p et $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre λ. On définit les processus $(P_t)_{t\geq 0}$ et $(F_t)_{t\geq 0}$:

$$P_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \text{ et } F_t = \sum_{i=1}^{N_t} (1 - X_i).$$

   Montrer que P_t et F_t sont deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs $p\lambda$ et $(1-p)\lambda$.

Exercice 3. Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. La variable X a-t-elle une densité ?

2. Calculer $\mathbb{E}[X_1|X_2]$ et $\mathbb{E}[X_1|X_2, X_3]$.

3. Calculer $\mathbb{E}[e^{i\xi X_1}|X_2]$ et $\mathbb{E}[e^{i\xi X_1}|X_2, X_3]$.

Exercice 4 (Paradoxe de l'autobus)**.**
Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson standard (d'intensité 1). On note $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ les sauts du processus. Pour $t \geq 0$ on pose

$$Z_t = t - T_{N_t} \text{ et } W_t = T_{N_t+1} - t.$$

1. Calculer la loi du couple (Z_t, W_t). En particulier montrer que
   (a) les variables Z_t et W_t sont indépendantes,
   (b) la variable W_t suit une loi $\mathcal{E}(1)$,
   (c) on a $Z_t = \min(t, \mathcal{E}(1))$ en loi.

2. Montrer que Z_t converge en loi vers une variable exponentielle de paramètre 1.

3. Calculer $\lim_{t\to\infty} E[W_t + Z_t]$. Interpréter.

Exercice 5.
Soient $U_1, U_2, ..., U_n$ des variables i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$.

1. Montrer que $n \min_{1 \leq i \leq n} U_i$ converge en loi vers $\mathcal{E}(1)$.

2. Montrer que $n^2 \min_{i,j} |U_i - U_j|$ converge en loi (et déterminer sa limite).

Exercice 6 (Processus de Poisson non-homogène)**.**
Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}+, \mathcal{B}(\mathbb{R}+))$, σ-finie. On dit que $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité μ si c'est un processus càdlàg, croissant, à valeurs dans les entiers, à accroissements indépendants et tel que our tous $t > s \geq 0$, $(N_t - N_s) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{P}(\mu(]s, t]))$.

1. Montrer qu'un tel processus existe.

2. Que dire si μ est la mesure de Lebesgue ?

3. Soient μ et μ' deux mesures σ-finie, N_t et N'_t des processus de Poisson indépendants d'intensités respectives μ et μ'. Montrer que $(N_t + N'_t)_t$ est un processus de Poisson d'intensité $\mu + \mu'$.

4. Montrer qu'il existe un processus de Poisson homogène $(M_s)_{s \geq 0}$ et une fonction $f : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+$ croissante tels que $N_t = M_{f(t)}$ p.s.

5. ($\star$) Est-il possible détendre cette construction pour les mesures signées ?

Exercice 7 (File d'attente)**.** ($\star$)
On considère un file d'attente avec un seul guichet : les clients entrent selon un processus de Poisson d'intensité λ, et les temps de service des clients sont iid de loi $\mathcal{E}(\mu)$, $\mu > \lambda$. On note Q_t la longueur de la queue à l'instant t. On considère que le système est dans son régime stationnaire, c'est-à-dire que pour tous t, s, $Q_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} Q_s$, ou encore que la queue vue par le n-ème client lorsqu'il entre dans le magasin a la même loi que la queue vue par le $(n+1)$-ème. Calculer cette loi.

Exercice 8.
Un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ vérifie les trois propriétés suivantes :

- c'est un processus de comptage, $i.e.$ part de 0, est croissant et ne fait que des sauts de taille 1 en restant continu à droite,

- à accroissements stationnaires de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, $i.e.$ pour tout $t, s \geq 0$ on a $N_{t+s} - N_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} N_s \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{P}(s\lambda)$ en loi,

- et à accroissements indépendants, $i.e.$ pour tout $t, s \geq 0$ la variable $N_{t+s} - N_t$ est indépendante de $(N_u)_{u \leq t}$.

1. Montrer que réciproquement, un processus qui vérifie les trois propriétés ci-dessus est un processus de Poisson d'intensité λ.

2. ($*$) Montrer que tout processus de comptage à accroissements indépendants stationnaires (pas forcément poissoniens !) est en réalité un processus de Poisson.