TD3 : Modules, anneaux noetheriens, topologie de Zariski

Indications de correction

Exercice 4

1. X est irréductible . En effet si $X = p_1...p_r$ alors les p_i sont tous constants sauf un pour des raisons de degré . Alors nécessairement les constantes valent 1 ou -1 et le seul de degré 1 vaut X ou $-X$. Pourtant $X = 2 \times X/2$ et ni 2 ni $X/2$ ne sont inversibles dans A.

2. Considérer la suite d'idéaux $(X/2^n)$.

Exercice 5

cf. cours

Exercice 8

Soit P une fonction polynomiale s'annulant sur Γ . On écrit alors la division euclidienne de P par $(X^3 - Y)$ dans l'anneau euclidien $\mathbb{C}(X, Z)[Y]$ qui donne un reste de la forme de degré 0 en Y que l'on note $Q(X, Z)$. On se ramène dans $\mathbb{C}(X)[Z]$ et on fait la division euclidienne de Q par $(X^5 - Z)$ on obtient une fonction ne dépendant que de X. L'évaluation sur Γ donne la nullité de cette dernière fonction polynomiale et on a bien $P \in (X^3 - Y, X^5 - Z)$.

Exercice 10

Si U ouvert non dense dans X irréductible on a alors V ouvert non vide ne rencontrant pas U. D'où $X = (X \backslash U) \cup (X \backslash V)$ union de deux fermés non égaux à X et non vides ce qui contredit l'irréductibilité de X.

Prendre X la réunion des deux axes dans le plan. L'axe des x privé de l'origine est un ouvert (son complémentaire est l'axe des y qui est fermé dans X) et cet ouvert n'est pas dense (il est contenu dans l'axe des x qui est fermé dans X).