Td n° 3 d'Analyse fonctionnelle

Distributions et convolution

Séance du 29 février 2010

Exercice 1. *Support et ordre*

Soit u l'application linéaire sur $\mathcal{D}(R)$ définie par :

$$u(\phi) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\phi\left(\frac{1}{i}\right) - n\phi(0) - \log(n)\phi'(0)\right).$$

1. Montrer que $u(\phi)$ est bien définie, et que u est une distribution d'ordre au plus 2.

2. Quel est le support S de u ?

3. On considère une suite d'élément ϕ_k de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ satisfaisant $\phi_k \in \mathcal{D}(]\frac{1}{k+1}, 2[)$, $0 \leq \phi_k \leq 1/\sqrt{k}$ et $\phi_k|_{[\frac{1}{k},1]} = 1/\sqrt{k}$. à l'aide des ϕ_k, montrer que quelque soit $p \in \mathbb{N}$, on ne peut obtenir aucune majoration du type :

$$|u(\phi)| \leq C\sum_{i=0}^{p}\sup_{x\in S}|\partial^i\phi(x)|.$$

4. Quel est l'ordre de T.

Indication : On pourra considérer des fonctions du type $\psi_k = \psi(x)\int_0^x\int_0^y \phi(kt)dtdy$, où $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ d'intégrale 1, et $\psi \in \mathcal{D}(]-1,2[)$ est telle que $\psi(x) = 1$ pour $x \in [0,1]$.

⋆

Exercice 2. *Distributions qui sont régulières*

1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $1 < p < \infty$. On suppose que :

$$\sup_{\phi\in\mathcal{D}(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{|T(\phi)|}{\|\phi\|_{L^p}} < \infty.$$

Montrer que T s'identifie à une fonction de L^q avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(]0,1[)$, tel que T' s'identifie à une fonction de $L^2(]0,1[)$. Montrer que T s'identifie à une fonction $u \in L^2(]0,1[)$. En déduire que que $u \in C^0([0,1])$.

3. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que T' s'identifie à une fonction f continue. Montrer que T est s'identifie à une fonction $g \in C^1$ et que $g' = f$.

4. Soient $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C(\mathbb{R})$, tels que au sens des distributions, on a : $u' + au = f$. Montrer que $u \in C^1(\mathbb{R})$ et donc que l'équation précédente à lieu au sens classique.

⋆

Exercice 3. *Petits calculs de convolutions*

1. Expliquer pourquoi il est possible de convoler une distribution à support compact avec une distribution quelconque.

2. Trouver une distribution $H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad (H * f)' = f.$$

H est la fonction de Heaviside. Trouver un équivalent en dimension supèrieure.

3. Calculer les convolutions suivantes (après en avoir justifié l'existence) :

$$\begin{array}{c} \delta_a * H, \quad \delta' * \mathbb{1}, \quad (x^m \delta_0^{(n)}) * (x^p \delta_0^{(q)}), \quad (\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'', \\ T * \mathbb{1}, \quad T * \exp, \qquad \text{où } T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}). \end{array}$$

4. Comparer $(\mathbb{1} * \delta') * H$ et $\mathbb{1} * (\delta' * H)$. Qu'en conclure ?

5. Trouver $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

⋆

Exercice 4. *Equations différentielles*

On appelle solution fondamentale d'une équation différentielle linéaire inhomogène

$$\sum_k a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t)$$

une distribution u telle que $\sum_k a_k u^{(k)} = \delta_0$. On en déduit alors une solution pour $f(t)$, en considérant $u * f$ (si c'est possible).

On introduit $\mathcal{D}'_+ = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) | \operatorname{Supp}(u) \subset \mathbb{R}^+\}$.

1. Expliquer pourquoi il est possible de convoler deux distributions de $\mathcal{D}'_+$. En déduire que $\mathcal{D}'_+$ forme une algèbre commutative pour $*$, d'élément neutre δ_0.

On notera u^{*n} la n-ième puissance de u, pour $n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{Z}$ si u est inversible).

2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\delta_0' - \lambda\delta_0$ est inversible, et que :

$$(\delta_0' - \lambda\delta_0)^{*-1} = H(t)e^{\lambda t}.$$

($H = \mathbb{1}_{x \geq 0}$ est la fonction de Heaviside).

3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(\delta_0' - \lambda\delta_0)^{*-n} = H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}.$$

4. En déduire que toute équation différentielle linéaire à coefficients constants admet une solution fondamentale dans $\mathcal{D}'_+$.

⋆