Td n° 3 d'EDP

Intégrales oscillantes

Séance du 17 octobre 2014

Exercice 1. *Calcul de deux intégrales oscillantes*

1. Soit $a \in A^m(\mathbb{R}^n)$. Montrer que

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}a(y)dydx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}a(x)dydx = a(0).$$

2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Montrer que

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}\frac{y^\alpha x^\beta}{\alpha!\beta!}dydx = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha \neq \beta, \\ \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \text{ si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

$\star$

Exercice 2. *Paramétrice d'un problème elliptique*

Soit $P(\xi)$ un polynôme en ξ à n variables tel qu'il existe $m \geq 1$ et $R, C > 0$ tels que

$$|P(\xi)| \geq C|\xi|^m, \quad \forall |\xi| \geq R.$$

On dit alors que l'opérateur $P(D)$ est elliptique.

1. Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi = 1$ sur $B(0, R)$. Montrer que pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, l'intégrale $\int e^{ix.\xi}\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}u(x)dxd\xi$ a un sens au sens des intégrales oscillantes.

2. Soit U un ouvert borné ne contenant pas 0. On considère la distribution T sur $\mathcal{D}(U)$ définie par

$$< T, u >= \int e^{ix.\xi}\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}u(x)dxd\xi.$$

Montrer que T s'identifie à une fonction de $L^2(U)$.

3. Montrer de même que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha T$ s'identifie à une fonction de $L^2(U)$. En déduire que T s'identifie à une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

4. Montrer que l'on a $P(D)T = \delta + r$, avec $r \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. T est appelée une paramétrice de $P(D)$.

5. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une paramétrice de $P(D)$ à support dans $B(0, \varepsilon)$.

$\star$

Exercice 3. *Transformée FBI et analyticité*

Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On appelle transformée FBI (Fourier-Bros-Iagolnitzer)

$$P^t f(\xi, x) = \int e^{-2\pi iy\xi - \pi t(y-x)^2}f(y)dy.$$

1. Montrer que $t^{\frac{1}{4}}P^t$ est une isométrie $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. En déduire une formule pour l'inverse de P^t.

Le but de l'exercice est de montrer le théorème suivant

Théorème 1. *Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Alors f est analytique au voisinage de x_0 si et seulement si f vérifie la propriété $A(x_0)$ qui dit :*

il existe un voisinage U de x_0 et des constantes ε, C, K telles que pour tout $x \in U$

$$|P^t f(t\xi, x)| \leq Ce^{-\varepsilon t} \quad \forall |\xi| \geq K, t \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que la propriété $A(x_0)$ est locale : si f vérifie $A(x_0)$ et $g = f$ au voisinage de x_0 alors g vérifie aussi $A(x_0)$.

3. On suppose que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ est analytique au voisinage de x_0. Montrer que l'on a

$$P^t f(t\xi, x) = \int e^{-2\pi it(y-i\delta sgn(\xi)\chi(y))\xi - \pi t(y-i\delta sgn(\xi)\chi(y)-x)^2} f(y-i\delta sgn(\xi)\chi(y))(1-i\delta sgn(\xi)\chi'(y))dy,$$

où $\chi \in C_c^\infty$ est à support dans $\{|y-x_0| < 2\delta\}$ telle que $\chi = 1$ sur $\{|y-x_0| < \delta\}$ et δ est bien choisi.

4. En déduire que la condition $A(x_0)$ est vérifiée pour C, K, ε bien choisis.

5. on considère la distribution D définie par

$$< f, D >= \int \int e^{2\pi ix\xi - 2\pi ax^2|\xi|}(1 + iaxsgn(\xi))f(x)dxd\xi.$$

Montrer que $D = \delta$.

Indication : On pourra montrer que D est supportée en 0, puis que $< f, D >= 0$ si f s'annule jusqu'à l'ordre 2 en 0, puis que $< f, D >= 0$ si f s'annule jusqu'à l'ordre 1 en 0.

6. Montrer $P^t(fg)(t\xi, x) = \int P^{\frac{t}{2}} f(t\xi - \eta, x) P^{\frac{t}{2}} g(\eta, x) d\eta$.

7. En déduire que si $f, g \in C_c^\infty$ vérifient $A(x_0)$, il en est de même pour fg.

8. On suppose que $f \in C_c^\infty$ satisfait $A(x_0)$. En utilisant le formule $f(x) =< D(x-.), f >$ montrer que l'on peut prolonger f en une fonction holomorphe sur un voisinage de x_0 dans $\mathbb{C}$. Conclure.

⋆

Exercice 4. *Rappels sur le front d'onde*

Soit u une distribution à support compact sur $\mathbb{R}^n$. Soit ξ telle que $\hat{u}$ est à décroissance rapide sur un voisinage conique C_1 de ξ (on dit alors que $\xi \notin \Sigma(u)$).

1. Montrer qu'il existe un voisinage conique C_2 de ξ et une constante c telle que pour tout $\eta \in C_2$ on ait $|\eta - \zeta| \leq c|\eta| \Rightarrow \zeta \in C_1$.

2. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\widehat{\phi u}$ est à décroissance rapide sur C_2.

3. En déduire que pour tout $u \in \mathcal{D}'$, pour tout $\phi \in C^\infty$ on a $WF(\phi u) \subset WF(u)$.

4. Soit $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $\phi_2 \neq 0$ sur le support de ϕ_1. Montrer que $\Sigma(\phi_2 u) \subset \Sigma(\phi_1 u)$.

5. On considère $\Sigma_x(u) = \cap \Sigma(\phi u)$ pour $\phi \in C_c^\infty$ telles que $\phi(x) = 1$. Rappeler pourquoi $\Sigma_x = \{\xi, (x, \xi) \in WF(u)\}$.

6. Soit Γ un voisinage conique de Σ_x. Montrer qu'il existe un nombre fini de $\phi_j \in C_c^\infty$ avec $\phi_j(x) \neq 0$ telles que $\cap \Sigma(\phi_j u) \subset \Gamma$.

7. En déduire qu'il existe un voisinage U de x tel que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(U)$ on ait $\Sigma(\phi u) \subset \Gamma$.

⋆