3 Martingales[1] (théorème d'arrêt)

Exercice 3.1 (Une curiosité)**.** Trouver un processus $(M_n)_{n\geq 0}$ avec $E[|M_n|] < \infty$ pour tout n et tel que $E[M_{n+1} \mid M_n] = M_n$ sans que (M_n) soit une martingale.

Correction : On considère une marche aléatoire simple démarrant de 0 avec des pas indépendants ± 1 mais au premier retour en 0 la marche est obligée de faire le même pas que son tout premier.

Exercice 3.2 (Une trivialité)**.** Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On note pour $n \geq 0$, $\mathcal{G}_n = \sigma(M_0, \ldots, M_n)$ la filtration *canonique* associée à la martingale (M_n). Montrer que (M_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{G}_n)$.

Correction : On remarque que $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$ et donc

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \mid \mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{G}_n] = M_n.$$

Exercice 3.3 (À la pêche aux martingales)**.** Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distributées telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Pour $n \geq 0$, on note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ($\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$) et on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $(S_n^2 - n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
3. Montrer que $(S_n^3 - 3nS_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
4. Devinez[2] un polynôme $P(x, y)$ de degré 4 en x et de degré 2 en y tel que $(P(S_n, n))_{n\geq 0}$ soit une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
5. Plus généralement montrer que si P est un polynôme de deux variables alors $(P(S_n, n))_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si et seulement si pour tout $s, n \in \mathbb{Z}_+$ on a
$$P(s + 1, n + 1) + P(s - 1, n + 1) = 2P(s, n).$$
6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver un $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $(\exp(\lambda S_n - \xi n))_{n\geq 0}$ soit une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Correction : Non corrigé.

Exercice 3.4. Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(T \leq n + N \mid \mathcal{F}_n) > \varepsilon, \quad p.s..$$

Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < \infty$.

1. Dans l'encyclopédie du cheval : courroie du harnais qui s'oppose à l'élévation exagérée de la tête du cheval.
2. Réponse : Vous pouvez essayer $P(x, y) = x^4 - 6x^2y + 3y^2 + 2y$

Correction : On montre par récurrence sur $k \geq 0$ que

$$\mathbb{P}(T \geq kN) \leq (1-\varepsilon)^k.$$

C'est vrai pour $k = 0$ et on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \geq (k+1)N) &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T\geq kN}\mathbf{1}_{T\geq (k+1)N}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T\geq kN}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T\geq kN+N} \mid \mathcal{F}_n\right]\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T\geq kN}(1-\varepsilon)\right] \\ &\leq (1-\varepsilon)^{k+1}, \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. On en déduit aisément que $\mathbb{E}[T] < \infty$ et en particulier que T est presque sûrement fini.

Exercice 3.5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dont la loi est déterminée par

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \;\text{ et }\; \mathbb{P}(X_n = -1) = 1-p$$

avec $p \in]0,1[\backslash\{1/2\}$. Soient K et N deux entiers tels que $0 \leq K \leq N$. On pose $S_0 = K$, $S_n = K + X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$, $T_0 = \inf\{n \geq 0, S_n = 0\}$, $T_N = \inf\{n \geq 0, S_n = N\}$, $T = T_0 \wedge T_N$ et pour tout $n \geq 0$,

$$M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}.$$

1. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.
2. En considérant la martingale arrêtée $(M_{n\wedge T})_{n\geq 0}$, calculer $\mathbb{P}(T = T_0)$ et $\mathbb{P}(T = T_N)$.

Correction : Corrigé page 184 du poly de J.F. Le Gall.

Exercice 3.6 (Une réciproque du théorème d'arrêt.)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ intégrable et adapté. Montrer que, si l'on a $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout temps d'arrêt borné τ, alors $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

Correction : Le processus (X_n) est intégrable et adapté, donc il suffit de montrer que pour tout n, $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$. Par la caractérisation de l'espérance conditionnelle, il suffit donc de montrer que pour tout n et pour tout $A \in \mathcal{F}_n$, on a

$$\mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_A) \,=\, \mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_A)\,. \tag{1}$$

Le seul outil en notre possession étant les temps d'arrêt, on va essayer d'en trouver qui sont adaptés à notre problème.

On se fixe $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{F}_n$. D'une part, si on considère le temps d'arrêt constant $\tau = n$, on obtient

$$\mathbb{E}[X_n] \,=\, \mathbb{E}[X_\tau] \,=\, \mathbb{E}[X_0]\,.$$

D'autre part, pour un temps d'arrêt τ quelconque, on en déduit que

$$\mathbb{E}[X_\tau] \,=\, \mathbb{E}[X_0] \,=\, \mathbb{E}[X_n]\,.$$

Etant donné qu'on veut montrer (**??**), il semble naturel de chosir τ tel que X_τ s'exprime en terme de X_n, X_{n+1} et $\mathbb{1}_A$. Si on choisit

$$\tau \,=\, n\mathbb{1}_{A^c} + (n+1)\mathbb{1}_A,$$

on a $X_\tau = X_n\mathbb{1}_{A^c} + X_{n+1}\mathbb{1}_A$ et donc

$$\mathbb{E}[X_n\mathbb{1}_{A^c} + X_{n+1}\mathbb{1}_A] \,=\, \mathbb{E}[X_n]\,,$$

ce qui implique bien

$$\mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_A) \,=\, \mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_A)\,,$$

et permet de conclure.

Exercice 3.7 (Une autre version du théorème d'arrêt.)**.** Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$ et T un temps d'arrêt vérifiant

$$\mathbb{P}(T < +\infty) = 1\ ,\ \ \mathbb{E}(|X_T|) < \infty \text{ et } \mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{\{T>n\}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. Montrer que $\mathbb{E}(|X_T|\mathbb{1}_{\{T>n\}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(|X_{T\wedge n} - X_T|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. En déduire que $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

Correction :

1. Le temps d'arrêt T est fini p.s. et $|X_T|$ aussi donc
$$|X_T|\mathbb{1}_{\{T>n\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0\,.$$
Or $|X_T|\mathbb{1}_{\{T>n\}} \leq |X_T|$ et $\mathbb{E}(|X_T|) < +\infty$. Ainsi, le théorème de convergence dominée entraîne le résultat.
2. On a
$$\mathbb{E}(|X_{T\wedge n} - X_T|) \,=\, \mathbb{E}\left(|X_n - X_T|\mathbb{1}_{\{T>n\}}\right) \,\leq\, \mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{\{T>n\}}) + \mathbb{E}(|X_T|\mathbb{1}_{\{T>n\}})\,.$$
Le terme de droite de cette équation tend vers 0 quand n tend vers l'infini d'après la deuxième hypothèse et la question 1., on a donc le résultat.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{T\wedge n})$=$\mathbb{E}(X_0)$ car $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (ou de manière équivalente par le théorème d'arrêt appliqué au temps d'arrêt borné $T \wedge n$). La question 2. implique la convergence
$$\mathbb{E}(X_{T\wedge n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X_T)\,,$$
donc $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

Exercice 3.8. (*) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que p.s. pour tout $n \geq 0$ on ait $|X_{n+1} - X_n| < M$. Montrer alors que l'on a presque sûrement l'alternative suivante : soit X_n converge, soit $\liminf X_n = -\infty$ et $\limsup X_n = +\infty$.

Correction : Bureau V4.

Exercice 3.9 (Le singe tapant Molière (tiré du livre de D. Williams))**.** Un singe est assis devant une machine à écrire et commence à taper une lettre par seconde. Il tape à chaque fois indépendamment une lettre choisie au hasard parmi les 26 lettres de l'alphabet. On se demande au bout de combien de temps (en espérance) le singe aura tapé le mot “ABRACADABRA”. Pour cela on va définir (en rusant) une martingale. On suppose que le singe a juste à côté de lui un sac rempli de beaucoup beaucoup de pièces de 1€ et aime faire des jeux stupides. On joue alors au jeu suivant : juste *avant* chaque seconde $n = 1, 2, 3, \ldots$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1€ avec lui sur l'événement

$$\{\text{la } n\text{ième lettre tapée par l'animal est un “A”}\}.$$

Si il perd, il part (et le singe met 1€ dans son sac). Si il gagne, il reçoit 26€ du singe qu'il remise immédiatement sur l'évènement

$$\{\text{la } n+1\text{ième lettre tapée par l'animal est un “B”}\}.$$

Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit 26^2€ (ça commence à faire hein ?) qu'il remise immédiatement sur l'évènement

$$\{\text{la } n+2\text{ième lettre tapée par l'animal est un “R”}\}.$$

Et ainsi de suite jusqu'à ce que “ABRACADABRA” sorte de la machine, on notera T ce temps d'arrêt. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe...

1. Montrer que l'argent dépensé par le singe (en valeur algébrique !) jusqu'au temps n est une martingale.
2. En déduire
$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$
3. Refaire le même exercice en remplaçant “ABRACADABRA” par “ABCDEFGHIJK”. Commentez.

Correction : Bureau V4