

TD 4 : LIMITES UNIFORMES DE FONCTIONS HOLOMORPHES

Exercices 🏠 : à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.

Exercices 📖 : seront traités en classe en priorité.

Exercices 🦋 : plus difficiles.

Exercice 1: Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$f(z) := \int_0^\infty \frac{e^{zt}}{t^t} dt.$$

1. Montrer que f est bien définie et est entière (i.e. holomorphe sur \mathbb{C}).
2. On fixe un paramètre $\lambda > 0$ et $z = x + iy$, où $y = \pi/2 + \lambda$. En utilisant une intégration le long d'une courbe lisse par morceaux de support

$$C_{\epsilon,R} = \{z = \epsilon e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi/2\} \cup [\epsilon, R] \cup \{z = R e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi/2\} \cup [i\epsilon, iR],$$

montrer que $|f(z)| \leq 1/\lambda$. En déduire que $|f|$ est bornée par $2/\pi$ hors de la bande $|\text{Im } z| \leq \pi$.

3. À l'aide de f , construire une fonction entière g non nulle telle que $g(z)$ tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers l'infini et que z reste sur une demi-droite quelconque d'extrémité l'origine du plan.

Exercice 2: 📖

1. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} , à croissance modérée, i.e. telle qu'il existe une constante A telle que $|f(x)| \leq A/(1+x^2)$ pour tout x . On rappelle que sous cette hypothèse la transformée de Fourier de f :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-2i\pi\xi x} dx$$

est bien définie et continue sur \mathbb{R} et que si \hat{f} est également à croissance modérée, la formule d'inversion de Fourier est valable :

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi x} d\xi$$

- (a) On suppose de plus qu'il existe des constantes $A, B > 0$ telles que $|\hat{f}(\xi)| \leq A e^{-B|\xi|}$ pour tout ξ . Montrer que f est la restriction à \mathbb{R} d'une fonction holomorphe sur la bande $\{z \in \mathbb{C}, |\text{Im}(z)| < C\}$, pour tout $0 < C < B/(2\pi)$.
 - (b) Déterminer les fonctions continues sur \mathbb{R} à support compact dont la transformée de Fourier est également à support compact.
2. On se donne cette fois une fonction f holomorphe sur la bande $\{z, |\text{Im}(z)| < a\}$, pour un certain $a > 0$ et vérifiant

$$|f(x + iy)| \leq \frac{A}{1+x^2}$$

pour un certain $A > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $|y| < a$. Montrer l'existence d'une constante B telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq B e^{-2\pi b|\xi|},$$

pour tout $0 \leq b < a$. On pourra considérer le contour d'intégration délimité par le rectangle de sommets $\{\pm R, \pm R - ib\}$ si $\xi > 0$.

Exercice 3: 🦋

On note $U = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > 0\}$. On admet le fait suivant (que l'on reverra plus tard) :

Fait. Si f est holomorphe bornée sur U et s'annule en z_1, z_2, \dots avec $\inf(|z_n|) > 0$ et $\sum \text{Re}(z_n^{-1}) = \infty$, alors f est nulle.

A l'aide de résultat, montrer la moitié du théorème de Müntz : si (k_n) est une suite strictement croissante de réels positifs avec $k_0 = 0$ et $\sum_{n>0} k_n^{-1} = +\infty$, l'espace vectoriel engendré par les fonctions $x \mapsto x^{k_n}$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Si μ est une mesure borélienne régulière sur $[0, 1]$, on pourra considérer la fonction sur U donnée par $f_\mu(z) = \int_0^1 t^z \mu(t)$.

Exercice 4: 

1. Soient U un ouvert non vide de \mathbb{C} et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge simplement vers une fonction f . Montrer qu'il existe un ouvert non vide V de U et un réel $M > 0$ tels que :

$$\forall z \in V, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(z)| \leq M.$$

2. En déduire qu'une limite simple de fonctions holomorphes sur un ouvert U de \mathbb{C} est une fonction qui est holomorphe sur un ouvert V dense dans U .

Exercice 5:  (pour la semaine du 12 mars)

Soient $a < b$ deux réels et

$$U = \{z \in \mathbb{C}, a < \operatorname{Re}(z) < b, \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ bornée. On suppose qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c + iy) \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow +\infty$. Montrer que $f(x + iy) \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow +\infty$ pour tout $x \in]a, b[$. On pensera à utiliser le théorème de Montel!

Exercice 6: 

Soit U un ouvert connexe borné de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow U$ une fonction holomorphe. Supposons qu'il existe $a \in U$ tel que $f(a) = a$. On pose $f_n = f \circ \dots \circ f$ (n fois). On cherche à montrer les trois faits suivants :

- (A) $|f'(a)| \leq 1$;
 (B) $|f'(a)| = 1$ si, et seulement si, f est bijective ;
 (C) si $|f'(a)| < 1$, alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de U vers la fonction constante égale à a .

- Vérifier que l'on peut supposer que $0 \in U$ et que $a = 0$. On fait cette hypothèse dans la suite de l'exercice.
- Montrer (A).
- (a) Montrer que, si f est bijective, alors $|f'(0)| = 1$.
 (b) Montrer que si $f'(0) = 1$, alors $f = \operatorname{Id}_U$.
 (c)  En déduire (B).
- Montrer (C).

Exercice 7:

- Sur un disque, peut-on approcher uniformément sur les compacts une fonction holomorphe par des polynômes ? Qu'en est-il sur une couronne ? Essayer de deviner une condition sur K , compact du plan, qui garantisse qu'une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de K puisse être approchée uniformément sur K par des polynômes.
-  Soit U un ouvert de \mathbb{C} , $K \subset U$ compact. Montrer qu'il existe une famille finie $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de segments dans $U \setminus K$ telle que pour toute $f \in H(U)$, l'on ait

$$\forall z \in K, f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

- En déduire que f peut être approchée uniformément sur K par des fractions rationnelles dont les pôles sont dans $\mathbb{C} \setminus K$.
- Montrer que si K est un compact du plan dont le complémentaire est connexe, toute fonction holomorphe sur un voisinage de K peut être approchée uniformément sur K par des polynômes.
 On commencera par le cas $f(z) = 1/(z - a)$, $a \notin K$.
-  Que dire de la réciproque du résultat précédent ?
- Une première application.* Soit K un sous-ensemble compact du cercle unité S . Montrer que si $K \neq S$, il existe un polynôme P tel que $P(0) = 1$ et $|P(z)| < 1$ pour tout $z \in K$. Que dire si $K = S$?

7. Une deuxième application. Pour $n \geq 1$, on pose

$$K_n = \{z, |z| \leq n, d(z, \mathbb{R}^+) \geq \frac{1}{n}\} \cup \{z, |y| \leq \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \leq x \leq n\} \cup \overline{D}(0, \frac{1}{n+1}).$$

Dessiner K_n . Que peut-on dire de son complémentaire ?

En utilisant les ensembles K_n , fabriquer une suite $(P_n)_n$ de polynômes vérifiant $\lim P_n(0) = 1$, $\lim P_n(z) = 0$ pour tout z différent de 0, et $\lim P_n^{(k)}(z) = 0$ pour tout $k > 0$ et tout $z \in \mathbb{C}$, cette dernière convergence étant uniforme sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

Le résultat de cette question est à rapprocher de celui de l'exercice 5.

Exercice 8: 

1. Soit D le disque unité de \mathbb{C} . Existe-t-il une application holomorphe injective propre (i.e. telle que l'image réciproque de tout compact est compact) $f : D \rightarrow \mathbb{C}$?
2. Soit A et B deux compacts disjoints de \mathbb{C} tels que $\mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ soit connexe, u et v deux fonctions entières. Soit $\epsilon > 0, M > 0$ deux réels. En appliquant le théorème d'approximation de Runge vu à l'exercice 8, montrer qu'il existe un polynôme P tel que

$$\forall z \in A, |P(z) + f(z)| \leq \epsilon \quad ; \quad \forall z \in B, |P(z) + g(z)| \geq M.$$

3. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$K_n = \{z \in \mathbb{C}, 1 - \frac{1}{2^{2n}} \leq |z| \leq 1 - \frac{1}{2^{2n+1}}, d(z, \mathbb{R}^+) \geq \frac{1}{n+1}\}.$$

Dessiner K_n quand n varie. Montrer qu'il existe $f \in H(D)$ telle que $\min\{|f(z)|, z \in K_n\} \geq 2^n$ pour tout n .

On cherchera f sous la forme $f = \sum P_n$, où pour chaque n , P_n est un polynôme construit en appliquant judicieusement la question précédente avec $A = K_1 \cup \dots \cup K_{n-1}$ et $B = K_n$.

4. Soit $m \geq 1$. On appelle *plongement holomorphe propre* de D dans \mathbb{C}^m une application

$$z \in D \mapsto (f_1(z), \dots, f_m(z)) \in \mathbb{C}^m$$

qui soit injective, propre, avec chaque f_i holomorphe, et $(f'_1(z), \dots, f'_m(z)) \neq (0, \dots, 0)$ pour tout $z \in D$.

Montrer qu'il existe un plongement holomorphe propre de D dans \mathbb{C}^3 .

On prendra $f_1(z) = 1/(z-1)$. Que suffit-il alors d'imposer à f_2 et f_3 pour que $z \mapsto (f_1(z), f_2(z), f_3(z))$ soit un plongement holomorphe propre ?

Exercice 9: Partiel 2017

1. Soit $R > 0$ et f holomorphe dans $D(0, R)$.
 - (a) Rappeler comment déduire de la formule de Cauchy que f est développable en série entière en 0, le rayon de convergence de la série étant au moins égal à R .
 - (b) On suppose que f est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $D(0, R)$, notée λ . Montrer que pour tout z dans $D(0, R)$ on a :

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{D(0,R)} \frac{R^2}{(R^2 - \bar{w}z)^2} f(w) d\lambda(w).$$

On utilisera le développement en série entière de $\frac{1}{(1-u)^2}$ en 0.

2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω . Montrer que si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n(z)| d\lambda(z) = 0,$$

alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout compact de Ω .