

### TD 4 : LIMITES UNIFORMES DE FONCTIONS HOLOMORPHES

Exercices 🏠 : à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.

Exercices 📖 : seront traités en classe en priorité.

Exercices 🦋 : plus difficiles.

**Exercice 1:** Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on pose

$$f(z) := \int_0^\infty \frac{e^{zt}}{t^t} dt.$$

1. Montrer que  $f$  est bien définie et est entière (i.e. holomorphe sur  $\mathbb{C}$ ).
2. On fixe un paramètre  $\lambda > 0$  et  $z = x + iy$ , où  $y = \pi/2 + \lambda$ . En utilisant une intégration le long d'une courbe lisse par morceaux de support

$$C_{\epsilon,R} = \{z = \epsilon e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi/2\} \cup [\epsilon, R] \cup \{z = R e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi/2\} \cup [i\epsilon, iR],$$

montrer que  $|f(z)| \leq 1/\lambda$ . En déduire que  $|f|$  est bornée par  $2/\pi$  hors de la bande  $|\text{Im } z| \leq \pi$ .

3. À l'aide de  $f$ , construire une fonction entière  $g$  non nulle telle que  $g(z)$  tend vers 0 lorsque  $|z|$  tend vers l'infini et que  $z$  reste sur une demi-droite quelconque d'extrémité l'origine du plan.

**Exercice 2:** 📖

1. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , à croissance modérée, i.e. telle qu'il existe une constante  $A$  telle que  $|f(x)| \leq A/(1+x^2)$  pour tout  $x$ . On rappelle que sous cette hypothèse la transformée de Fourier de  $f$  :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-2i\pi\xi x} dx$$

est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}$  et que si  $\hat{f}$  est également à croissance modérée, la formule d'inversion de Fourier est valable :

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi x} d\xi$$

- (a) On suppose de plus qu'il existe des constantes  $A, B > 0$  telles que  $|\hat{f}(\xi)| \leq A e^{-B|\xi|}$  pour tout  $\xi$ . Montrer que  $f$  est la restriction à  $\mathbb{R}$  d'une fonction holomorphe sur la bande  $\{z \in \mathbb{C}, |\text{Im}(z)| < C\}$ , pour tout  $0 < C < B/(2\pi)$ .
  - (b) Déterminer les fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  à support compact dont la transformée de Fourier est également à support compact.
2. On se donne cette fois une fonction  $f$  holomorphe sur la bande  $\{z, |\text{Im}(z)| < a\}$ , pour un certain  $a > 0$  et vérifiant

$$|f(x + iy)| \leq \frac{A}{1+x^2}$$

pour un certain  $A > 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $|y| < a$ . Montrer l'existence d'une constante  $B$  telle que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq B e^{-2\pi b|\xi|},$$

pour tout  $0 \leq b < a$ . On pourra considérer le contour d'intégration délimité par le rectangle de sommets  $\{\pm R, \pm R - ib\}$  si  $\xi > 0$ .

**Exercice 3:** 🦋

On note  $U = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > 0\}$ . On admet le fait suivant (que l'on reverra plus tard) :

*Fait.* Si  $f$  est holomorphe bornée sur  $U$  et s'annule en  $z_1, z_2, \dots$  avec  $\inf(|z_n|) > 0$  et  $\sum \text{Re}(z_n^{-1}) = \infty$ , alors  $f$  est nulle.


A l'aide de résultat, montrer la moitié du théorème de Müntz : si  $(k_n)$  est une suite strictement croissante de réels positifs avec  $k_0 = 0$  et  $\sum_{n>0} k_n^{-1} = +\infty$ , l'espace vectoriel engendré par les fonctions  $x \mapsto x^{k_n}$  est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Si  $\mu$  est une mesure borélienne régulière sur  $[0, 1]$ , on pourra considérer la fonction sur  $U$  donnée par  $f_\mu(z) = \int_0^1 t^z \mu(t)$ .

**Exercice 4:** 

1. Soient  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{C}$  et  $(f_n)_n$  une suite de fonctions holomorphes sur  $U$  qui converge simplement vers une fonction  $f$ . Montrer qu'il existe un ouvert non vide  $V$  de  $U$  et un réel  $M > 0$  tels que :

$$\forall z \in V, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(z)| \leq M.$$

2. En déduire qu'une limite simple de fonctions holomorphes sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  est une fonction qui est holomorphe sur un ouvert  $V$  dense dans  $U$ .

**Exercice 5:**  (pour la semaine du 12 mars)

Soient  $a < b$  deux réels et


$$U = \{z \in \mathbb{C}, a < \operatorname{Re}(z) < b, \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Soit  $f \in \mathcal{O}(U)$  bornée. On suppose qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c + iy) \rightarrow 0$  quand  $y \rightarrow +\infty$ . Montrer que  $f(x + iy) \rightarrow 0$  quand  $y \rightarrow +\infty$  pour tout  $x \in ]a, b[$ . On pensera à utiliser le théorème de Montel!


**Exercice 6:** 

Soit  $U$  un ouvert connexe borné de  $\mathbb{C}$  et  $f : U \rightarrow U$  une fonction holomorphe. Supposons qu'il existe  $a \in U$  tel que  $f(a) = a$ . On pose  $f_n = f \circ \dots \circ f$  ( $n$  fois). On cherche à montrer les trois faits suivants :


- (A)  $|f'(a)| \leq 1$  ;  
 (B)  $|f'(a)| = 1$  si, et seulement si,  $f$  est bijective ;  
 (C) si  $|f'(a)| < 1$ , alors la suite  $(f_n)_n$  converge uniformément sur tout compact de  $U$  vers la fonction constante égale à  $a$ .

- Vérifier que l'on peut supposer que  $0 \in U$  et que  $a = 0$ . On fait cette hypothèse dans la suite de l'exercice.
- Montrer (A).
- (a) Montrer que, si  $f$  est bijective, alors  $|f'(0)| = 1$ .  
 (b) Montrer que si  $f'(0) = 1$ , alors  $f = \operatorname{Id}_U$ .  
 (c)  En déduire (B).
- Montrer (C).

**Exercice 7:**

- Sur un disque, peut-on approcher uniformément sur les compacts une fonction holomorphe par des polynômes ? Qu'en est-il sur une couronne ? Essayer de deviner une condition sur  $K$ , compact du plan, qui garantisse qu'une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de  $K$  puisse être approchée uniformément sur  $K$  par des polynômes.
-  Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $K \subset U$  compact. Montrer qu'il existe une famille finie  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  de segments dans  $U \setminus K$  telle que pour toute  $f \in H(U)$ , l'on ait

$$\forall z \in K, f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

- En déduire que  $f$  peut être approchée uniformément sur  $K$  par des fractions rationnelles dont les pôles sont dans  $\mathbb{C} \setminus K$ .
- Montrer que si  $K$  est un compact du plan dont le complémentaire est connexe, toute fonction holomorphe sur un voisinage de  $K$  peut être approchée uniformément sur  $K$  par des polynômes.  
 On commencera par le cas  $f(z) = 1/(z - a)$ ,  $a \notin K$ .
-  Que dire de la réciproque du résultat précédent ?
- Une première application.* Soit  $K$  un sous-ensemble compact du cercle unité  $S$ . Montrer que si  $K \neq S$ , il existe un polynôme  $P$  tel que  $P(0) = 1$  et  $|P(z)| < 1$  pour tout  $z \in K$ . Que dire si  $K = S$  ?

7. Une deuxième application. Pour  $n \geq 1$ , on pose

$$K_n = \{z, |z| \leq n, d(z, \mathbb{R}^+) \geq \frac{1}{n}\} \cup \{z, |y| \leq \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \leq x \leq n\} \cup \overline{D}(0, \frac{1}{n+1}).$$

Dessiner  $K_n$ . Que peut-on dire de son complémentaire ?

En utilisant les ensembles  $K_n$ , fabriquer une suite  $(P_n)_n$  de polynômes vérifiant  $\lim P_n(0) = 1$ ,  $\lim P_n(z) = 0$  pour tout  $z$  différent de 0, et  $\lim P_n^{(k)}(z) = 0$  pour tout  $k > 0$  et tout  $z \in \mathbb{C}$ , cette dernière convergence étant uniforme sur les compacts de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ .

Le résultat de cette question est à rapprocher de celui de l'exercice 5.

**Exercice 8:** 

1. Soit  $D$  le disque unité de  $\mathbb{C}$ . Existe-t-il une application holomorphe injective propre (i.e. telle que l'image réciproque de tout compact est compact)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  ?
2. Soit  $A$  et  $B$  deux compacts disjoints de  $\mathbb{C}$  tels que  $\mathbb{C} \setminus (A \cup B)$  soit connexe,  $u$  et  $v$  deux fonctions entières. Soit  $\epsilon > 0, M > 0$  deux réels. En appliquant le théorème d'approximation de Runge vu à l'exercice 8, montrer qu'il existe un polynôme  $P$  tel que

$$\forall z \in A, |P(z) + f(z)| \leq \epsilon \quad ; \quad \forall z \in B, |P(z) + g(z)| \geq M.$$

3. Pour tout  $n \geq 1$ , on pose

$$K_n = \{z \in \mathbb{C}, 1 - \frac{1}{2^{2n}} \leq |z| \leq 1 - \frac{1}{2^{2n+1}}, d(z, \mathbb{R}^+) \geq \frac{1}{n+1}\}.$$

Dessiner  $K_n$  quand  $n$  varie. Montrer qu'il existe  $f \in H(D)$  telle que  $\min\{|f(z)|, z \in K_n\} \geq 2^n$  pour tout  $n$ .

On cherchera  $f$  sous la forme  $f = \sum P_n$ , où pour chaque  $n$ ,  $P_n$  est un polynôme construit en appliquant judicieusement la question précédente avec  $A = K_1 \cup \dots \cup K_{n-1}$  et  $B = K_n$ .

4. Soit  $m \geq 1$ . On appelle *plongement holomorphe propre* de  $D$  dans  $\mathbb{C}^m$  une application

$$z \in D \mapsto (f_1(z), \dots, f_m(z)) \in \mathbb{C}^m$$

qui soit injective, propre, avec chaque  $f_i$  holomorphe, et  $(f'_1(z), \dots, f'_m(z)) \neq (0, \dots, 0)$  pour tout  $z \in D$ .

Montrer qu'il existe un plongement holomorphe propre de  $D$  dans  $\mathbb{C}^3$ .

On prendra  $f_1(z) = 1/(z-1)$ . Que suffit-il alors d'imposer à  $f_2$  et  $f_3$  pour que  $z \mapsto (f_1(z), f_2(z), f_3(z))$  soit un plongement holomorphe propre ?

**Exercice 9: Partiel 2017**

1. Soit  $R > 0$  et  $f$  holomorphe dans  $D(0, R)$ .
  - (a) Rappeler comment déduire de la formule de Cauchy que  $f$  est développable en série entière en 0, le rayon de convergence de la série étant au moins égal à  $R$ .
  - (b) On suppose que  $f$  est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $D(0, R)$ , notée  $\lambda$ . Montrer que pour tout  $z$  dans  $D(0, R)$  on a :

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{D(0,R)} \frac{R^2}{(R^2 - \bar{w}z)^2} f(w) d\lambda(w).$$

On utilisera le développement en série entière de  $\frac{1}{(1-u)^2}$  en 0.

2. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions holomorphes sur  $\Omega$ . Montrer que si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n(z)| d\lambda(z) = 0,$$

alors  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers 0 sur tout compact de  $\Omega$ .