École Normale Supérieure
17 octobre 2017

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\mathrm{o}}$4 Corrigé

Exercice 1 : questions diverses

1. a) Montrons que le complémentaire du graphe est ouvert. Soit $x \in X$ et $y \neq f(x)$, puisque Y est séparé il est possible de trouver des voisinages ouverts disjoints U et V de $f(x)$ et y respectivement. Comme f est continue en x, il est possible de trouver un voisinage ouvert W de x tel que $f(W) \subset U$. Alors $W \times V$ est un voisinage ouvert de (x, y) qui n'intersecte pas le graphe : si $x \in W$, $f(x) \in U$ donc $f(x) \notin V$.
b) Supposons le graphe fermé. Montrons que f est continue en chaque point. Soit $x \in X$ et V un voisinage ouvert de $f(x)$. Si $y \notin V$, on peut séparer (x, y) du graphe de f : soit $U_y \times V_y$ un ouvert voisinage de (x, y) disjoint du graphe. Les (V_y) recouvrent V^c qui compact puisque fermé dans un compact. On peut donc extraire un recouvrement fini :

$$V^c \subset \bigcup_1^n V_{y_i}.$$

On pose ensuite $U := \bigcap U_{y_i}$. Si $x \in U$, alors pour tout i x est dans U_{y_i}, et donc $f(x)$ n'est pas dans V_{y_i} puisque les $U_y \times V_y$ sont choisis disjoints du graphe. Ainsi, $f(x)$ est dans $\left(\bigcup_i V_{y_i}\right)^c \subset V$, ce qui est ce qu'on voulait.
c) Il suffit de considérer la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ prolongée par 0 en 0 sur $\mathbb{R}$.

2. L'inclusion des topologies assure la continuité de id : $X_2 \to X_1$ où l'on a noté X_i l'espace X muni de la topologie $\mathcal{T}_i$. Montrons que la réciproque est également continue. Soit F un fermé de X_2. C'est un fermé d'un compact, il est donc compact. Son image dans X_1 reste donc compacte, et par conséquent devient fermé puisque X_1 est séparé. Ainsi, on a montré que l'application est fermée, donc sa réciproque est continue. On a en fait montré que les topologies compactes sont les topologies minimales parmi les topologies séparées.

3. [**Topologie quotient**]
a) Il est clair que $\emptyset$ et $X/\sim$ sont bien des ouverts puisque leurs images réciproques sont $\emptyset$ et X, qui sont évidemment des ouverts de X. Le fait que π^{-1} commute aux opérations d'union et d'intersection assure la stabilité par intersection finie et union quelconque.
b) Si f est continue, $f \circ \pi$ est continue en tant que composée d'applications continues. Réciproquement, soit V un ouvert de Z, vérifions que $f^{-1}(V)$ est bien un ouvert de $X/\sim$. Comme $f \circ \pi$ est continue, $(f \circ \pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(f^{-1}(V))$ est ouvert dans X, ce qui assure que $f^{-1}(V)$ est ouvert dans $X/\sim$, f est donc bien continue.

4. Montrons que f est fermée : soit F un fermé de K. C'est un fermé d'un compact, il est donc compact, son image par f reste donc compacte, et puisque L est séparé, l'image est en fait un fermé de L. On a montré que f était fermée, donc f^{-1} est continue.

5. [**théorème du point fixe**] L'application $\varphi(x) := d(x, f(x))$ est continue sur X et atteint son minimum en α, nécessairement nul, sinon $\varphi(f(\alpha)) < \varphi(\alpha)$. On a donc $\varphi(\alpha) = 0$, ce qui signifie que α est un point fixe de f. Celui-ci est unique, car si β était un point fixe différent on aurait $d(\alpha, \beta) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta)$, ce qui est absurde.

Si (x_n) est la suite des itérés de son premier terme x_0, considérons la suite des distances au point fixe $d(x_n, \alpha)$. Cette suite est décroissante et donc elle converge. Soit λ une valeur d'adhérence de (x_n). Si par l'absurde $\lambda \neq \alpha$, $f(\lambda)$ est également une valeur d'adhérence, et donc

$$l = d(\alpha, f(\lambda)) < d(\alpha, \lambda) = l,$$

ce qui est absurde. Donc finalement $\lambda = \alpha$ et $l = 0$, ce qui assure que la suite tend bien vers α.

6. [**lemme du tube**] Pour tout $y \in Y$ il existe un ouvert produit $U_y \times W_y$ contenant (x, y) et inclus dans V. Les W_y recouvrent Y qui est compact, il est donc possible d'en extraire un recouvrement fini :

$$Y = \bigcup_1^n W_{y_i}.$$

On pose ensuite $U := \bigcap_1^n U_{y_i}$, qui est un voisinage de x. Ainsi, $Y \times Y$ est un ouvert de la forme voulue, et sa construction assure qu'il est inclus dans V puisque

$$U \times Y \subset \bigcup U \times W_{y_i} \subset \bigcup_1^n U_{y_i} \times W_{y_i} \subset V.$$

Exercice 2 : les compacts sont normaux

1. Soit $x \in X$ et F un fermé. Pour tout $y \in F$ il existe deux ouverts disjoints U_y et V_y contenant respectivement x et y. On a donc

$$F \subset \bigcup_{y \in F} V_y.$$

Mais F est un fermé d'un compact, donc compact, on peut donc extraire un recouvrement fini du recouvrement ci-dessus :

$$F \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} =: V.$$

On pose alors $U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$, qui est ouvert en tant qu'intersection finie d'ouverts, et contient x. On a bien obtenu deux ouverts disjoints séparant x et F.

2. On applique exactement la même méthode en séparant F_1 de chacun des points de F_2, puis en extrayant un recouvrement fini. En somme, remplacer x par F_1 et F par F_2 et reprendre mot pour mot la question 1.

3. C'est encore une fois la même preuve puisque dans la question précédente on a seulement utilisé le fait que F_1 et F_2 étaient compacts.

Exercice 3 : sur les expansions

1. La suite de terme général $(f^n(x), f^n(y))$ est à valeurs dans $X \times X$. Comme ce dernier est compact, elle possède une valeur d'adhérence, et on peut donc en extraire une sous-suite de Cauchy. On note φ l'extractrice de cette sous-suite.

(i) Soit $\epsilon > 0$, les suites $(f^{\varphi(n)}(x))$ et $(f^{\varphi(n)}(y))$ étant de Cauchy, il existe deux rangs $n > m$ tels que
$$d(f^n(x), f^m(x)) < \epsilon,\ \ d(f^n(y), f^m(y)) < \epsilon.$$
Mais comme f est une expansion, on a
$$d(f^{n-m}(x), x) \leq d(f^{n-m+1}(x), f(x)) \leq \cdots \leq d(f^n(x), f^m(x)) < \epsilon$$
et de même pour y. Il suffit donc de prendre $p = n - m$.

(ii) Soit $\epsilon > 0$, on a donc
$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(f(x), f(y)) \\ &\leq d(f^p(x), f^p(y)) \\ &\leq d(f^p(x), x) + d(x,y) + d(y, f^p(y)) \\ &\leq d(x,y) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Comme cela est valable pour tout $\epsilon > 0$, on a finalement
$$d(x,y) \leq d(f(x), f(y)) \leq d(x,y),$$
de sorte que f est une isométrie. On a en particulier montré qu'une expansion était nécessairement continue.

2. Comme corollaire de la question 1, on a que pour tout x, $d(x, f(X)) = 0$ puisque pour tout $\epsilon > 0$ il existe un point y $(= f^{p-1}(x))$ tel que $d(x, f(y)) < \epsilon$. Comme X est compact, $f(X)$ est également compact, et il est donc fermé dans X, de sorte que $d(x, f(X)) = 0$ implique que $x \in f(X)$. La fonction f est bien surjective.

3. Comme f est surjective, il existe bien g (a priori non continue) telle que $f \circ g = \mathrm{id}_X$. Il suffit de prendre une fonction qui à un point associe l'un de ses antécédents par f. En appliquant le fait que f est une contraction en $g(x), g(y)$, il vient que
$$d(x,y) \leq d(g(x), g(y)),$$
et g est donc bien une expansion, c'est donc une isométrie surjective (donc bijective puisqu'une isométrie est injective) grâce aux questions 1 et 2.

Exercice 4 : sur la propreté

• Il faut montrer que la réciproque de f est continue. Pour cela nous allons montrer que f est fermée au sens où l'image directe d'un fermé est fermé. Montrons d'abord que l'image réciproque d'un compact est compact (*i.e.* f est *propre*). Soit K un compact. L'image réciproque de K est fermée car f est continue, et elle est bornée car f tend vers l'infini en l'infini, et donc l'image réciproque d'une partie bornée est également bornée.

Soit F un fermé et $y = \lim y_n$ une limite de points de $f(F)$. L'ensemble $K := \{y_n,\ n \geq 0\} \cup \{y\}$ est un compact, donc si on écrit $y_n = f(x_n)$, la suite (x_n) est à valeurs dans $f^{-1}(K)$, qui est compact, et on peut donc, quitte à extraire, supposer qu'elle converge vers x. Comme F est fermé, on a $x \in F$, et par continuité de f, $f(x) = y$, de sorte qu'on a bien $f(F)$ fermé. Cela montre qu'en général une application telle que l'image réciproque d'un compact est compact, est fermée. Dans ce cas particulier on aurait pu prendre une boule fermée de rayon suffisamment grand à la place de K.

Comme f envoie les fermés sur les fermés, l'image réciproque d'un fermé par la bijection réciproque de f est un fermé, ce qui signifie que f^{-1} est continue, et f est donc bien un homéomorphisme.

• Pour une version plus expéditive, comme f tend vers l'infini en l'infini, il est possible d'étendre f en une bijection continue du compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Comme une bijection continue entre compacts est un homéomorphisme, le résultat en découle.

• En fait, mais c'est dur à montrer sans les outils adéquats, l'hypothèse que f tend vers l'infini en l'infini est redondante avec le fait d'être une bijection continue.

Exercice 5 : compactification d'Alexandrov Exercice 6

Remarquons d'abord (on s'en servira dans plusieurs questions) qu'avec cette définition des ouverts de $\hat{X}$, tout ouvert U de $\hat{X}$ est tel que $U \cap X$ est ouvert dans U (si U vérifie 1., c'est évident ; si U vérifie 2., $U \cap X = X - (\hat{X} - U)$ donc U est le complémentaire d'un sous-ensemble fermé de X).

1. Les ensembles $\emptyset$ et $\hat{X}$ vérifient respectivement les propriétés 1 et 2 ; ce sont donc des ouverts. Si U_1 et U_2 sont ouverts, alors :

- si $U_1, U_2 \subset X$, alors $U_1 \cap U_2 \subset X$ et $U_1 \cap U_2$ est une intersection finie d'ouverts de X, donc un ouvert de X ; alors $U_1 \cap U_2$ est un ouvert de X.
- si $U_1 \subset X$ et $\infty \in U_2$, alors $U_1 \cap U_2 \subset X$. Alors $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap (X \cap U_2)$ est un ouvert. Donc $U_1 \cap U_2$ vérifie la propriété 1 et est un ouvert.
- si $\infty \in U_1$ et $U_2 \subset X$, même raisonnement que dans le cas précédent.
- si $\infty \in U_1$ et $\infty \in U_2$, on a $\infty \in U_1 \cap U_2$ et $\hat{X} - (U_1 \cap U_2) = (\hat{X} - U_1) \cup (\hat{X} - U_2)$. Dans un espace séparé (et c'est le cas ici car X est localement compact donc séparé), une union de compacts est un compact. Donc $\hat{X} - (U_1 \cap U_2)$ est un compact et $U_1 \cap U_2$ vérifie la propriété 2 donc est un ouvert.

Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de $\hat{X}$, montrons que $\bigcup_i U_i$ est aussi un ouvert.

- si $\infty \notin U_i$ pour tout i, alors $\bigcup_i U_i \subset X$ est est une union d'ouverts de X, donc un ouvert de X. Donc $\bigcup_i U_i$ est un ouvert de $\hat{X}$.

- s'il existe i_0 tel que $\infty \in U_{i_0}$, alors $\infty \in \bigcup\limits_i U_i$. De plus :

$$\begin{aligned}\hat{X} - \bigcup_i U_i &= \bigcap_i (\hat{X} - U_i) \\ &= \bigcap_i (X - X \cap U_i) \cap (\hat{X} - U_{i_0})\end{aligned}$$

L'ensemble $(\hat{X} - U_i) \cap X$ est un fermé pour tout i. L'ensemble $(X - X \cap U_i) \cap (\hat{X} - U_{i_0})$ est donc, pour tout i, un fermé du compact $\hat{X} - U_{i_0}$. Une intersection de fermés étant fermée, $\hat{X} - \bigcup\limits_i U_i$ est un sous-ensemble fermé d'un compact ; c'est un compact.

Donc $\bigcup\limits_i U_i$ vérifie la propriété 2 et est ouvert.

2. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\hat{X}$ dont l'union est $\hat{X}$. Montrons qu'on peut en extraire un recouvrement fini.
Puisque $\infty \in \bigcup\limits_i U_i$, il existe i_0 tel que $\infty \in U_{i_0}$. L'ensemble $\hat{X} - U_{i_0}$ est un compact de X, qui est inclus dans l'union des $(X \cap U_i)$.
Pour tout i, $X \cap U_i$ est un ouvert de X. Il existe donc $i_1, ..., i_s$ un nombre fini d'indices tels que :

$$\hat{X} - U_{i_0} \subset (X \cap U_{i_1}) \cup ... \cup (X \cap U_{i_s})$$

Pour ce choix d'indices, on a :

$$\hat{X} \subset U_{i_0} \cup ... \cup U_{i_s}$$

Si on montre que $\hat{X}$ est séparé, on aura donc montré que X est compact. Deux points disjoints $x, y \in X \subset \hat{X}$ sont séparés par des ouverts disjoints de $\hat{X}$ car ils sont séparés par des ouverts disjoints de X.
Traitons le cas où $x = \infty$ et $y \neq \infty$. Puisque X est localement compact, y admet un voisinage compact V. Alors $U = \hat{X} - V$ et $\mathring{V}$ sont des ouverts disjoints dont l'un contient x et l'autre y.

3. L'application i est bijective vers son image. Elle est continue. En effet, si U est un ouvert de $\hat{X}$, $i^{-1}(U) = X \cap U$ est un ouvert de X.
La réciproque $i^{-1} : i(X) \to X$ est aussi continue : si V est un ouvert de $i(X) = X \subset \hat{X}$, il existe U un ouvert de $\hat{X}$ tel que $V = X \cap U$. Donc $V = i^{-1}(V)$ est un ouvert de X.

4. On a vu que $\hat{X}$ vérifiait ces propriétés. Supposons maintenant que Y vérifie également ces propriétés et montrons que $\hat{X}$ et Y sont homéomorphes.
Notons $j : X \to Y$ l'application vérifiant la propriété 2 et notons ∞_Y l'unique point de $Y - j(X)$.
On définit une application $\phi : Y \to \hat{X}$ par :

$$\begin{aligned}\phi(j(x)) &= i(x) \text{ si } x \in X \\ \phi(\infty_Y) &= \infty\end{aligned}$$

Il s'agit d'une bijection. Montrons qu'il s'agit d'une application continue.
Soit U un ouvert de $\hat{X}$. Montrons que $\phi^{-1}(U)$ est un ouvert de Y.

- Premier cas : $U \subset X$. Dans ce cas, $\phi^{-1}(U) = j(U)$. Puisque j est un homéomorphisme sur son image, $j(U)$ est un ouvert de $j(X)$. L'ensemble $j(X)$ est lui-même un ouvert de Y (car il est égal à Y privé d'un point et, dans un espace séparé, les singletons sont fermés). Un ouvert d'un ouvert étant un ouvert, $j(U)$ est ouvert dans Y.
- Deuxième cas, $\infty \in U$ et $\hat{X} - U$ est un compact de X. Alors $\phi^{-1}(\hat{X} - U) = j(\hat{X} - U)$ donc $\phi^{-1}(\hat{X} - U)$ est l'image d'un compact par une application continue, j. Donc $j(\hat{X} - U)$ est un compact de $j(U)$; c'est aussi un compact de Y. Un sous-ensemble compact d'un espace séparé est nécessairement fermé donc $\phi^{-1}(\hat{X} - U)$ est un fermé. Puisque $\phi^{-1}(U)$ est son complémentaire, $\phi^{-1}(U)$ est ouvert.

Nous avons donc montré que ϕ était une bijection continue. Puisque X et Y sont compacts, ϕ est un homéomorphisme.

Exercice 7

1. a) Calculons une expression analytique de i.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Notons $(x', y', z') = i(x, y) \in S^2$.
On veut que $(x', y', z'), (0, 0, 1)$ et $(x, y, 0)$ soient alignés. Il doit donc exister $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(x', y', z') - (0, 0, 1) = t((x, y, 0) - (0, 0, 1))$$

c'est-à-dire :

$$(x', y', z') = (tx, ty, 1 - t)$$

Comme on souhaite avoir $(x', y', z') \in S^2$, il faut :

$$1 = t^2(x^2 + y^2) + (1 - t)^2 \quad \iff \quad t(t(x^2 + y^2 + 1) - 2) = 0$$

La seule possibilité autre que $t = 0$ est donc $t = \frac{2}{x^2+y^2+1}$. On trouve ainsi :

$$i(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right)$$

Cette application est bien définie et continue.
Montrons qu'elle réalise un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vers $S^2 - \{N\}$.
On vérifie que la fonction suivante

$$i^{-1}(x', y', z') = \left(\frac{x'}{1 - z'}, \frac{y'}{1 - z'}\right)$$

est bien définie et continue sur $S^2 - \{N\}$. On a $i \circ i^{-1} = Id_{S^2-\{N\}}$ et $i^{-1} \circ i = Id_{\mathbb{R}^2}$.
Puisque $S^2 - \{N\}$ est dense dans S^2, (S^2, i) est bien une compactification de $\mathbb{R}^2$.
Elle est homéomorphe à la compactification d'Alexandrov définie dans l'exercice précédent car elle vérifie les deux conditions de la question 4 de cet exercice.
b) Puisqu'on a calculé l'expression de i à la question précédente, on voit qu'il faut que $x_n^2 + y_n^2$ converge vers $+\infty$ (pour que la dernière coordonnée tende vers 1) et que cela suffit.

2. a) Un calcul similaire à celui de la question précédente permet d'obtenir :

$$i(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}},\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right)$$

et :

$$i^{-1}(x',y',z')=\left(\frac{x'}{z'},\frac{y'}{z'}\right)$$

Ces deux applications sont continues et inverses l'une de l'autre, ce qui montre que i réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vers $S^2_+-\{(x,y,z)\in S^2_+ \text{ tq } z=0\}$. Comme $S^2_+-\{(x,y,z)\in S^2_+ \text{ tq } z=0\}$ est dense dans S^2_+, on a bien une compactification.
b) Une suite $i(x_n,y_n)$ converge vers $(\cos\theta,\sin\theta,0)$ si et seulement si $||(x_n,y_n)||_2$ tend vers $+\infty$ et l'angle entre les vecteurs $(1,0)$ et (x_n,y_n) tend vers θ.
3. a) Si $[(x_1,...,x_{n+1})]$ est un élément de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, on pose :

$$f([(x_1,...,x_{n+1})])=\pi_S\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+...+x_{n+1}^2}},...,\frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_1^2+...+x_{n+1}^2}}\right)$$

où $\pi_S : S^n\to S^n/\sim_S$ désigne la projection sur les classes d'équivalence de $\sim_S$.
Cette application est bien définie : si on choisit deux représentants de la même classe d'équivalence, on obtient la même définition.
Elle est continue. En effet, si on note $\pi:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la projection sur les classes d'équivalence de $\sim$, on a :

$$f\circ\pi(x_1,...,x_{n+1})=\pi_S\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+...+x_{n+1}^2}},...,\frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_1^2+...+x_{n+1}^2}}\right)$$

C'est une application continue : cela garantit la continuité de f, d'après la question 4.b) du premier exercice.
La fonction f admet de plus pour réciproque l'application suivante :

$$g([x_1,...,x_{n+1}]_S)=\pi(x_1,...,x_{n+1})$$

qui est continue car $g\circ\pi_S=\pi\circ Id_{S^n\to\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}}$ est continue.
Donc f réalise un homéomorphisme de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ vers $S^n/\sim_S$.
b) L'espace $S^n/\sim_S$ est l'image de S^n par l'application continue π_S.
Montrons que $S^n/\sim_S$ est séparé : soient $[x]_S$ et $[y]_S$ deux éléments distincts de $S^n/\sim_S$. Pour $\epsilon>0$, notons $U_\epsilon=S^n\cap(B(x,\epsilon)\cup B(-x,\epsilon))$ et $V_\epsilon=S^n\cap(B(y,\epsilon)\cup B(-y,\epsilon))$. Leurs images dans $S^n/\sim_S$ sont des ouverts (car ils sont saturés pour la relation d'équivalence $\sim_S$) ; pour ϵ assez petit, ils sont disjoints. L'un contient $[x]_S$ et l'autre $[y]_S$.
Puisque S^n est compact et puisque l'image d'un compact par une application continue est un compact, $S^n/\sim_S$ est compact. Comme $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ lui est homéomorphe, il est également compact.
4. a) L'application i est continue (c'est la composée de π et de $(x,y)\in\mathbb{R}^2\to(x,y,1)\in\mathbb{R}^3$, qui sont deux applications continues). Elle est aussi injective.

Son image est $E = \{[(x,y,z)] \text{ tq } z \neq 0\}$. Cet ensemble est dense dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. En effet, tout point de son complémentaire est de la forme $[(x,y,0)] = \lim_{n\to+\infty}[(x,y,1/n)]$.
Montrons pour conclure que $i^{-1} : E \to \mathbb{R}^2$ est continue.
Remarquons que E, muni de la topologie induite, est homéomorphe à $(\mathbb{R}^3 - \{(x,y,0)\}_{x,y\in\mathbb{R}}) / \sim$, muni de la topologie quotient (de façon générale, avec les notations de la question 4 de l'exercice 1, si $U \subset X$ est un ouvert saturé pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, la topologie quotient $U/\mathcal{R}$ est la même que la topologie induite sur $U/\mathcal{R}$ par la topologie de $X/\mathcal{R}$). Pour montrer que i^{-1} est continue, il suffit donc de montrer que $i^{-1} \circ \pi$ est continue. C'est le cas puisque :

$$i^{-1} \circ \pi(x,y,z) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

b) Il faut que $||(x_n,y_n)||$ tende vers $+\infty$ et $\frac{y_n}{x_n}$ tende vers $\tan\theta$ (ou $\frac{x_n}{y_n} \to 0$ dans le cas où $\theta \equiv \pi/2[\pi]$ n'est pas défini).
Pour simplifier, on le démontre dans le cas où $\tan\theta$ est définie.
Supposons d'abord que $i(x_n,y_n) \to [(\cos\theta, \sin\theta, 0)]$.
Pour tout $\alpha > 1$ et tout $M > 0$, l'ensemble

$$E_{\alpha,M} = \{[(x,y,z)] \text{ tq } x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{\alpha}\tan\theta < \frac{y}{x} < \alpha\tan\theta \text{ et } M|z| < \sqrt{x^2+y^2}\}$$

est un ouvert de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (car son antécédant par π est un ouvert de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$).
Puisque cet ensemble contient $[(\cos\theta, \sin\theta, 0)]$, il doit contenir tous les $i(x_n,y_n) = [(x_n,y_n,1)]$ à partir d'un certain rang. Donc, à partir d'un certain rang :

$$||(x_n,y_n)|| > M \text{ et } \frac{1}{\alpha}\tan\theta < \frac{y_n}{x_n} < \alpha\tan\theta$$

Puisque c'est vrai pour tous α et M, la condition énoncée plus haut est nécessaire.
Elle est également suffisante. En effet, supposons qu'elle est vérifiée. On peut vérifier qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$ telle que $\frac{x_n\epsilon_n}{||(x_n,y_n)||} \to \cos\theta$ et $\frac{y_n\epsilon_n}{||(x_n,y_n)||} \to \sin\theta$.
Alors :

$$i(x_n,y_n) = [(x_n,y_n,1)] = \left[\frac{x_n\epsilon_n}{||(x_n,y_n)||}, \frac{y_n\epsilon_n}{||(x_n,y_n)||}, \frac{\epsilon_n}{||(x_n,y_n)||}\right] \to [(\cos\theta, \sin\theta, 0)]$$

(car l'application π est continue donc envoie une suite convergente vers une suite convergente)

Exercice 8 ✐✐✐ : compacité et compacité séquentielle

1. Soit $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$.
On munit $\{0,1\}$ de la topologie discrète ; c'est alors un compact. On pose :

$$X = \{0,1\}^A$$

et on munit X de la topologie produit.
D'après le théorème de Tychonoff, X est compact. Montrons en revanche qu'il n'est pas séquentiellement compact.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{(n)} = (1_E(n))_{E \in A}$, où, pour tout $E \subset A$, $1_E(n)$ vaut 1 si $n \in E$ et 0 sinon. Montrons que $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente.
En effet, supposons par l'absurde que $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extraction telle que $(u^{(\phi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $u^{(\infty)}$ au sens de la topologie produit.
Converger pour la topologie produit signifie que, pour toute $E \subset A$, $(u_E^{(\phi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u_E^{(\infty)}$ (voir à ce sujet l'exercice du TD 1 portant sur la topologie de la convergence simple).
Choisissons $E = \{\phi(2n) \text{ tq } n \in \mathbb{N}\}$. Alors $u_E^{(\phi(n))}$ vaut 1 si n est pair et 0 si n est impair. La suite $(u_E^{(\phi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas. C'est absurde.

Toutefois, l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_m | m \geq n\}}.$$

C'est une intersection décroissante de fermés non vides ; donc cet ensemble est non vide dans un espace compact. Attention ! dans un espace topologique général, une valeur d'adhérence est une notion plus générale que celle de limite d'une sous-suite.

2. On considère ω_1 le premier ordinal non dénombrable (cf. cours de logique). Ses éléments sont les ordinaux dénombrables et on écrit encore $\omega_1 = [0, \omega_1[$. On le munit de la topologie de l'ordre.
Cet espace topologique n'est pas compact. En effet, on a $\omega_1 = \cup_{\alpha\in\omega_1}\alpha$. Or, $\alpha = [0, \alpha[$ est ouvert dans ω_1. Si ω_1 était compact, il serait union finie d'ordinaux dénombrables, donc il serait dénombrable.
En revanche, ω_1 est séquentiellement compact. Soit (α_n) une suite d'ordinaux dénombrables. Par la propriété de bon ordre des ordinaux, on peut en extraire une sous-suite croissante. On montre aisément qu'une suite croissante d'ordinaux converge vers son supremum, c'est-à-dire vers l'union de ces ordinaux. Comme ce supremum est union dénombrable d'ordinaux dénombrables, c'est encore un ordinal dénombrable. Donc, ω_1 est séquentiellement compact.

Exercice 9 ✐✐ : Ensemble de Cantor, super-compact

1. C'est une intersection décroissante de fermés dans un compact, c'est donc un compact (non-vide !).

2. On munit $K := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la distance produit $d(x,y) := \sum_1^\infty \frac{|x_n - y_n|}{3^n}$. Il est compact car c'est un produit de compacts. On peut aussi le montrer directement en réalisant une extraction diagonale. On considère l'application

$$x \in K \longmapsto \sum_1^\infty \frac{2x_k}{3^k}.$$

On vérifie qu'elle est bien définie, surjective par la même occasion (par construction des K_n), et injective par unicité du développement en base 3. Elle est continue car le choix de la distance produit la rend lipschitzienne, c'est donc un homéomorphisme car les espaces sont tous les deux compacts.

3. a) On recouvre K par un nombre fini (pris égal à 2^k) de boules fermées de rayon 1, puis on construit les $\mathcal{A}(\epsilon)$ si ϵ est de taille inférieure à k en séparant successivement en deux l'ensemble des boules. (faire un arbre, c'est un peu compliqué à rédiger proprement sans dessin) Puis on recommence avec chacune des boules obtenues, en les recouvrant par des boules de rayon $\frac{1}{2}$, et caetera ... On vérifie bien toutes les propriétés voules : les deux premières sont obtenues par construction, la dernière découle du théorème des fermés emboîtés et du fait que le diamètre des boules est choisi tendant vers 0.
b) L'application $f : \epsilon \in C \longmapsto x$ tq $\{x\} = \bigcap_n \mathcal{A}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ convient. On vérifie qu'elle est bien surjective car tout point $x \in K$ peut être écrit de la forme en appliquant à répétition la première propriété des $\mathcal{A}(\epsilon)$, et elle est bien continue : si $\eta \in \{\epsilon_1\} \times \cdots \{\epsilon_n\} \times \{0;1\} \times \cdots$, $d(f(\eta), f(\epsilon)) \leq \mathbf{diam}\mathcal{A}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) \to 0$.

Exercice 10 ✐✐ : théorème de Kuratowski

1. Soit F un fermé de $X \times Y$ et soit $y_n \longrightarrow y$ une suite convergente de points de $\pi(F)$. On peut donc pour chaque n trouver $x_n \in X$ tel que $(x_n, y_n) \in F$. Quitte à extraire, on peut ensuite supposer que x_n converge. La suite converge donc vers $(x, y) \in F$ puisque F est fermé. Ainsi, $y \in \pi(F)$ qui est par conséquent fermé.

2. Il faut maintenant transposer la preuve avec des ouverts. Soit F un fermé de $X \times Y$, montrons que le complémentaire de la projection sur Y est également fermé. Soit $y \notin \pi(F)$, cela signifie que pour tout $x \in X$, $(x, y) \notin F$, on peut donc trouver $U_x \times V_x$ un voisinage de (x, y) ne rencontrant pas F. Les U_x recouvrent X qui est compact, on peut donc extraire un recouvrement fini :

$$X = \bigcup_1^n U_{x_i},$$

puis poser $V := \bigcap_1^n V_{x_i}$ qui est un voisinage de $y \in Y$ ne rencontrant pas $\pi(F)$. En effet, pour $z \in V$, z est dans chacun des V_{x_i}, et donc pour aucun x de U_{x_i} (x, z) n'est dans F, comme ceux-ci recouvrent X, z n'est pas dans $\pi(F)$. Le complémentaire de ce dernier est ouvert, il est donc bien fermé.

3. a) On pose $Y := X \sqcup \{\infty\}$. L'ensemble des parties ne contenant pas ∞ et les complémentaires des unions finies d'ouverts du recouvrement auxquelles on rajoute ∞ forment une base de topologie de Y. Il suffit de vérifier que $\emptyset$, Y sont bien ouverts, et que la famille est stable par intersection finie, ce qui est clair.
b) Soit $\overline{\Delta}$ l'adhérence de la diagonale de X dans $X \times Y$. C'est un fermé de $X \times Y$. Il est clair que sa projection contient X, il s'agit donc juste de déterminer si la projection contient ou non l'infini. Si $\infty \in \pi_Y(\overline{\Delta})$, cela signifie qu'il existe $x \in X$ tel que $(x, \infty) \in \overline{\Delta}$. Cela n'est pas possible : comme les U_i recouvrent X, on peut trouver i tel que $x \in U_i$. Alors $U_i \times (U_i^c \cup \{\infty\})$ est un voisinage de (x, ∞) qui ne rencontre pas Δ, ce qui assure que (x, ∞) ne peut pas être dans son adhérence. Par conséquent, $\pi_Y(\overline{\Delta}) = X$.
c) On a supposé que la projection était fermée, comme $\overline{\Delta}$ est fermé, son image X est un fermé de Y. Son complémentaire est donc ouvert, comme il contient ∞, cela signifie par construction que son complémentaire est une union finie d'éléments du recouvrement, et on peut donc bien extraire un sous-recouvrement fini.

Exercice 11 : Théorème de Dini

Quitte à retrancher la limite à la suite de fonctions, on peut supposer que cette dernière est la fonction nulle. Soit $\epsilon > 0$. On pose alors $F_n := \{x \in X \text{ tq } f_n(x) \geq \epsilon\}$. Ceux-ci forment une suite décroissante (par décroissance de la suite de fonctions) de fermés (par continuité des f_n) et d'intersection vide puisque la suite tend vers 0. Comme X est compact, le fait que l'intersection décroissante soit vide assure que l'un des fermés est lui-même vide, il existe donc n_0 tel que pour tout x $f_{n_0}(x) < \epsilon$, ce qui sera aussi le cas pour tous les rangs suivants par décroissance de la suite. On a bien montré que la convergence était uniforme.

Exercice 12 : théorème de Riesz

Tel que posé, il n'y a rien à montrer ... On va à la place montrer qu'un espace est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte. Seul le sens réciproque est à montrer puisque la boule unité est un fermé borné, donc compact si l'on se trouve dans un espace de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si E est un espace vectoriel normé, et que F est un sous-espace fermé, on peut définir la fonction distance à ce sous-espace par $d(x, F) := \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Elle vérifie le résultat suivant : si F est un sous-espace fermé strict de E, il existe un vecteur de norme inférieure à 1 à distance supérieure à $\frac{1}{2}$ de f. En effet, si $F \neq E$, soit $z \notin F$ et $y \in F$ tel que $\|z - y\| < 2d(z, F)$. On pose ensuite $x := \frac{z-y}{\|z-y\|}$ qui est bien de norme 1. Si $w \in F$,

$$\begin{aligned}
\|x - w\| &= \frac{\|z - y - \|z - y\|w\|}{\|z - y\|} \\
&\geq \frac{d(z, F)}{\|z - y\|} \\
&\geq \frac{d(z, F)}{2d(z, F)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On raisonne ensuite par l'absurde : si E n'est pas de dimension finie, il est possible en utilisant le résultat précédent de construire par récurrence une suite de points de la boule unité à distance supérieure à $\frac{1}{2}$ les uns des autres, ce qui assure que cette dernière n'est pas compacte.