

Td n° 4 d'Analyse fonctionnelle

DISTRIBUTIONS

Séance du 8 mars 2013

Exercice 1. *Partition de l'unité et fonction plateau*

1. Construire une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , telle que $g(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $g(x) = 0$ si $|x| \geq 2$, et $g(x) \in [0, 1]$ pour tout x .

2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , et V_i une famille d'ouverts telle que $\bigcup_i V_i = \Omega$. Montrer qu'il existe une suite de fonctions $\varphi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ positives telle que pour tout n , φ_n est à support dans l'un des V_i , que pour tout $x \in \Omega$,

$$\sum_i \varphi_i(x) = 1,$$

(la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls) et que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=1}^m \varphi_n|_K = 1$.

3. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et K un compact de U . Montrer qu'il existe une fonction $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ à support compact dans U , à valeur dans $[0, 1]$ et telle que pour tout x dans un voisinage de K , $\psi(x) = 1$.

★

Exercice 2. *Support d'une distribution*

Soit Ω un ouvert. On dit qu'une distribution u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est nulle sur Ω si pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u(\phi) = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des ouverts sur lesquels u est nulle est stable par réunion. On appelle support de u (et on note $\text{Supp}(u)$) le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel u est nul.

2. Montrer que cette notion de support coïncide avec la notion usuelle pour des fonctions régulières. Quel est le support de δ_0 ?

3. Montrer qu'une distribution à support compact est d'ordre fini.

★

Exercice 3. *Quelques exemples de distributions*

1. Montrer que $u : \phi \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \phi^{(i)}(i)$ est une distribution sur \mathbb{R} d'ordre infini.

2. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ définie par $u(\phi) = \int \phi(x, x) dx$. Montrer que u est bien une distribution, et calculer $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$.

3. Montrer que $e^{\frac{1}{x^2}}$ appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_*^+)$, mais ne se prolonge pas à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $v' = u$, et que l'ensemble de telles distributions forme un espace affine.

★

Exercice 4. *Support et ordre*

Soit u l'application linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par :

$$u(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \phi\left(\frac{1}{i}\right) - n\phi(0) - \log(n)\phi'(0) \right).$$

1. Montrer que $u(\phi)$ est bien définie, et que u est une distribution d'ordre au plus 2.
2. Quel est le support S de u ?
3. On considère une suite d'éléments ϕ_k de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ satisfaisant $\phi_k \in \mathcal{D}(\frac{1}{k+1}, 2]$, $0 \leq \phi_k \leq 1/\sqrt{k}$ et $\phi_k|_{[\frac{1}{k}, 1]} = 1/\sqrt{k}$. à l'aide des ϕ_k , montrer que quelque soit $p \in \mathbb{N}$, on ne peut obtenir aucune majoration du type :

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{i=0}^p \sup_{x \in S} |\partial^i \phi(x)|.$$

4. Quel est l'ordre de T .

Indication : On pourra considérer des fonctions du type $\psi_k = \psi(x) \int_0^x \int_0^y \phi(kt) dt dy$, où $\phi \in \mathcal{D}(]0, 1])$ d'intégrale 1, et $\psi \in \mathcal{D}(]-1, 2])$ est telle que $\psi(x) = 1$ pour $x \in [0, 1]$.

★

Exercice 5. *Distributions qui sont régulières*

1. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $1 < p < \infty$. On suppose que :

$$\sup_{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|T(\phi)|}{\|\phi\|_{L^p}} < \infty.$$

Montrer que T s'identifie à une fonction de L^q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(]0, 1])$, tel que T' s'identifie à une fonction de $L^2(]0, 1])$. Montrer que T s'identifie à une fonction $u \in L^2(]0, 1])$. En déduire que $u \in C^0([0, 1])$.

3. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que T' s'identifie à une fonction f continue. Montrer que T est s'identifie à une fonction $g \in C^1$ et que $g' = f$.

4. Soient $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C(\mathbb{R})$, tels que au sens des distributions, on a : $u' + au = f$. Montrer que $u \in C^1(\mathbb{R})$ et donc que l'équation précédente à lieu au sens classique.

★

Exercice 6. *Valeur principale de $1/x$*

On souhaite définir la valeur principale de $1/x$, notée $\text{vp}(\frac{1}{x})$. On pose :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad (\text{vp } x, \phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right).$$

1. Montrer que la limite existe, et que la formule définit bien une distribution. Quel est son ordre ? (Suggestion : écrire grâce à la formule de Taylor, $\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x)$)

2. Montrer que $x \text{vp } x = \mathbb{1}$. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xu = \mathbb{1}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u = \text{vp } x + c\delta_0$.

3. Montrer que $|x|^{\alpha-1}x \rightarrow \text{vp } x$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $\alpha \rightarrow -1$ ($\alpha > -1$).

★