Td n° 4 d'Analyse fonctionnelle

Distributions et convolution

Séance du 7 mars 2014

Exercice 1. *Petits calculs de convolutions*

1. Soit $H = \mathbb{1}_{x\geq 0}$. Montrer que $H' = \delta$.
2. Calculer les convolutions suivantes (après en avoir justifié l'existence) :

$$\delta_a * H, \quad \delta' * \mathbb{1}, \quad (x^m\delta_0^{(n)}) * (x^p\delta_0^{(q)}), \quad (\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'',$$
$$T * \mathbb{1}, \quad T * \exp, \qquad \text{où } T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}).$$

3. Comparer $(\mathbb{1} * \delta') * H$ et $\mathbb{1} * (\delta' * H)$. Qu'en conclure ?
4. Trouver $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

$\star$

Exercice 2. *Approximation de l'identité et convolution dans L^p*

1. Soit $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\|\phi * \psi\|_{L^p} \leq \|\phi\|_{L^1}\|\psi\|_{L^p}$

2. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ positive, $\|\phi\|_{L^1} = 1$ et $\operatorname{Supp}\phi \subset B(0,1)$. On pose $\phi_m(x) = m^n\phi(mx)$. Si f est continue (bornée), montrer que $\phi_m * f \to f$ uniformément sur les compacts. En déduire que si pour tout $p < \infty$, si $f \in L^p$:

$$\|f * \phi_m - f\|_{L^p} \to 0 \quad \text{quand} \quad m \to \infty.$$

Que se passe-t-il pour L^∞ ? En déduire que $\mathcal{D}$ est dense dans L^p, $p < \infty$.

3. Soient $p, q, r \geq 1$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer l'on a :

$$\|\phi * \psi\|_{L^r} \leq \|\phi\|_{L^p}\|\psi\|_{L^q},$$

et montrer que l'on peut étendre la convolution à $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ en une application bilinéaire continue.

$\star$

Exercice 3. *Fonction test*

Soit $a > 0$. On note

$$H_a(x) = \frac{1}{a}(H - \delta_a * H)$$

1. Montrer que si $u \in C^k(\mathbb{R})$, alors $u * H_a \in C^{k+1}$.
2. Montrer que pour $u \in L^1(\mathbb{R})$, $\int u * H_a = \int u$.

On considère une suite (a_n), telle que $a_n > 0$, $a_n \geq a_{n+1}$ et $a = \sum a_n < \infty$. On pose $u_k = H_{a_0} * ... * H_{a_k}$.

3. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $u_k \in C^{k-1}$ et u_k est à support dans $[0, a_0 + ... + a_k]$.
4. Montrer les estimations suivantes

$$|u_k^{(j)}| \leq \frac{2^j}{a_0 ... a_j}, \quad \int |u_k^{(j)}|dx \leq \frac{2^j}{a_0 ... a_{j-1}}.$$

5. Montrer que les suites $u_k^{(j)}$ sont de Cauchy dans L^∞. En déduire que u_k converge vers une fonction u. Que peut-on dire de u ?

6. Existe-t-il des fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que $\forall n,\ |f^{(n)}(x)| \leq \frac{2^n}{n!}$?

7. Lemme de Borel : Soit b_n une suite quelconque de réels. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = b_n$.

⋆

Exercice 4. *Equations différentielles*

On appelle solution fondamentale d'une équation différentielle linéaire inhomogène

$$\sum_k a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t)$$

une distribution u telle que $\sum_k a_k u^{(k)} = \delta_0$. On en déduit alors une solution pour $f(t)$, en considérant $u * f$ (si c'est possible).

On introduit $\mathcal{D}'_+ = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) |\ \mathrm{Supp}(u) \subset \mathbb{R}^+\}$.

1. Expliquer pourquoi il est possible de convoler deux distributions de $\mathcal{D}'_+$. En déduire que $\mathcal{D}'_+$ forme une algèbre commutative pour $*$, d'élément neutre δ_0.

On notera u^{*n} la n-ième puissance de u, pour $n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{Z}$ si u est inversible).

2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\delta_0' - \lambda\delta_0$ est inversible, et que : $(\delta_0' - \lambda\delta_0)^{*-1} = H(t)e^{\lambda t}$.

3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(\delta_0' - \lambda\delta_0)^{*-n} = H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}$.

4. En déduire que toute équation différentielle linéaire à coefficients constants admet une solution fondamentale dans $\mathcal{D}'_+$.

⋆

Exercice 5. *Solution élémentaire du laplacien*

On souhaite trouver les solutions de $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

1. Calculer $\Delta(|x|^\alpha)$ dans $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$:

$$< \Delta\frac{1}{|x|^{N-2}}, \phi >= \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon} (\phi \frac{\partial |x|^{2-N}}{\partial n} - |x|^{2-N}\frac{\partial \phi}{\partial n}) d\sigma_\epsilon,$$

où $d\sigma_\epsilon$ est la mesure de surface sur ∂B_ϵ et $n(x) = \frac{x}{|x|}$ est la normale extérieure à B_ϵ.

3. Montrer que $-\Delta(\frac{1}{|x|^{N-2}}) = (N-2)mes(\mathbb{S}^{N-1})\delta_0$ au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

4. Soit $f \in \mathcal{E}'(\mathcal{R}^N)$ avec $N \geq 3$. Montrer que

$$u = \frac{1}{(N-2)mes(\mathbb{S}^{N-1})|x|^{N-2}} * f$$

est C^∞ hors du support de f et que c'est la seule solution (au sens des distributions) de $-\Delta u = f$ qui tend vers 0 à l'infini.

5. Montrer que $-\Delta(-\frac{1}{2\pi} ln(|x|)) = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

⋆