Analyse fonctionnelle
TD n° 4

Topologies faible et faible-$*$ (2)

Séance du 20 février 2017

Exercice 1. *Échauffement*

Soit E un espace vectoriel normé séparable. Démontrer « à la main », par un procédé d'extraction diagonale, que toute suite bornée de E^* admet une sous-suite qui converge pour la topologie faible-$*$.

$\star$

Exercice 2. *Sur l'adhérence séquentielle faible*

Soit H un Hilbert séparable, muni d'une base hilbertienne $\{e_n\}_{n\geq 1}$. On considère l'ensemble

$$F := \{e_m + me_n \mid m, n \geq 1\}.$$

Montrer que 0 n'est pas dans l'adhérence séquentielle faible de F, mais qu'il appartient à l'adhérence séquentielle faible de l'adhérence séquentielle faible de F.

$\star$

Exercice 3. *Théorème de Eberlein-Šmulian*

Le but de cet exercice est de prouver le résultat suivant :

Théorème. *Soit A une partie de E, un espace de Banach. Si A est relativement compacte pour la topologie faible, alors A est séquentiellement relativement (faiblement) compacte.*

1. On dit qu'une famille $\{\ell_j\}_{j\in J} \subset E^*$ sépare les points si :

$$\forall x \in E, (\forall j \in J, \ell_j(x) = 0) \Rightarrow x = 0.$$

Montrer qu'un Banach séparable admet une famille dénombrable de formes linéaires séparant les points, de norme 1.

2. Montrer que si E admet une famille dénombrable bornée de formes linéaires séparant les points, alors les compacts faibles sont métrisables.

3. On considère une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. On note $F = \overline{\mathrm{Vect}\{a_n | n \in \mathbb{N}\}}$ (on ne précise pas si l'adhérence est forte ou faible ; pourquoi ?). Montrer que $A \cap F$ est séquentiellement compact dans F pour la topologie faible $\sigma(F, F^*)$, et conclure.

4. Montrer que ce résultat est faux pour la topologie faible-$*$.

$\star$

Exercice 4. *Uniforme intégrabilité*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^1(\Omega)$. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 1. *On dit que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que pour tout borélien A satisfaisant $\lambda(A) \leq \delta$, on ait*

$$\int_A |f| \, d\lambda \leq \varepsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si et seulement si

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| \geq M\}} |f| \underset{M \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante telle que $g(t)/t \to +\infty$ et $\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_\Omega g(|f(x)|)dx < +\infty$.

⋆

Exercice 5. *Théorème de Dunford-Pettis*

1. Donner un exemple de suite bornée de $L^1(]-1,1[)$ dont aucune sous-suite ne converge faiblement.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant :

Théorème (Dunford-Pettis)**.** *Soit $\{f_n\}$ une suite bornée de $L^1(\Omega)$. Il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ qui converge pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ si et seulement si la famille $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.*

On considére dans un premier temps une suite de fonctions $f_n \in L^1(\Omega)$ bornée et uniformément intégrable.

2. Montrer qu'on peut supposer que $f_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $f_n^k = f_n \mathbb{1}_{\{f_n \leq k\}}$. Montrer que $\sup_n \|f_n - f_n^k\|_{L^1} \to 0$ quand $k \to \infty$.

4. En utilisant le théorème de Banach-Alaoglu, montrer qu'il existe une extraction ψ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\{f_{\psi(n)}^k\}_n$ converge faiblement, pour $\sigma(L^1, L^\infty)$, vers une limite qu'on notera f^k.

5. Montrer que f^k converge fortement dans L^1. On note f sa limite.
Indication : On pourra utiliser le théorème de Beppo-Levi.

6. Montrer que $\{f_{\psi(n)}\}$ converge faiblement vers f pour $\sigma(L^1, L^\infty)$.

On montre maintenant la réciproque. Soit f_n une suite de $L^1(\Omega)$ convergeant faiblement vers f. Fixons $\varepsilon > 0$, et notons $\mathfrak{X}$ l'ensemble des fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables de Ω. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit aussi les ensembles

$$X_n := \left\{ 1_A \in \mathfrak{X} \;\middle|\; \forall k \geq n, \; \left| \int_A (f_k(x) - f(x))dx \right| \leq \varepsilon \right\}.$$

7. Montrer que $\mathfrak{X}$ et X_n sont des fermés (forts) de L^1.

8. Utiliser le théorème de Baire, et montrer que $\mathcal{F}$ est nécessairement uniformément intégrable.

⋆