Analyse fonctionnelle
TD n$^{\text{o}}$ 4

Topologies faible et faible-$*$ (2)

Séance du 5 mars 2018

Exercice 1. *Échauffement*

Soit E un espace vectoriel normé séparable. Démontrer « à la main », par un procédé d'extraction diagonale, que toute suite bornée de E^* admet une sous-suite qui converge pour la topologie faible-$*$.

⋆

Exercice 2. *Sur l'adhérence séquentielle faible*

Soit H un Hilbert séparable, muni d'une base hilbertienne $\{e_n\}_{n\geq 1}$. On considère l'ensemble

$$F := \{e_m + me_n \mid m, n \geq 1\}.$$

Montrer que 0 n'est pas dans l'adhérence séquentielle faible de F, mais qu'il appartient à l'adhérence séquentielle faible de l'adhérence séquentielle faible de F.

⋆

Exercice 3. *Convexes fermés fort et non fermés faible-$*$*

1. Dans ℓ^∞, on considère

$$C := \{u \mid \liminf_{n\to\infty} u_n \geq 0\}.$$

Montrer que C est un convexe fermé fort, non fermé faible-$*$.

2. Soit E un espace de Banach non réflexif. Montrer qu'il existe une forme linéaire sur E^* d'une autre forme que $\varphi_x : \ell \mapsto \ell(x)$, où $x \in E$. Montrer que le noyau d'une telle forme est un hyperplan fermé fort, mais pas fermé faible-$*$.

⋆

Exercice 4. *Théorème de Eberlein-Šmulian*

Le but de cet exercice est de prouver le résultat suivant :

Théorème. *Soit A une partie de E, un espace normé. Si A est relativement compacte pour la topologie faible, alors A est séquentiellement relativement (faiblement) compacte.*

1. On dit qu'une famille $\{\ell_j\}_{j\in J} \subset E^*$ sépare les points si :

$$\forall x \in E, (\forall j \in J, \ell_j(x) = 0) \Rightarrow x = 0.$$

Montrer qu'un espace normé séparable admet une famille dénombrable de formes linéaires continues séparant les points, de norme 1.

2. Montrer que si E admet une famille dénombrable bornée de formes linéaires séparant les points, alors les compacts faibles sont métrisables.

3. On considère une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. On note $F = \overline{\mathrm{Vect}\{a_n | n \in \mathbb{N}\}}$ (on ne précise pas si l'adhérence est forte ou faible ; pourquoi ?). Montrer que $A \cap F$ est séquentiellement compact dans F pour la topologie faible $\sigma(F, F^*)$, et conclure.

4. Montrer que ce résultat est faux pour la topologie faible-$*$.

⋆

Exercice 5. *Le théorème de Stone-Weierstrass complexe via Krein-Milman*

On considère X un espace métrique compact. Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$. Le but de cet exercice est d'établir le résultat intermédiaire suivant :

Définition 1. *Une partie E de X est dite A-antisymétrique si l'algèbre A_E des restrictions des fonctions de A à E ne contient pas de fonction réelle non constante.*

Théorème (Bishop)**.** *Supposons que A soit fermée. Soit $g \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$ telle que $g_{|E} \in A_E$ pour toute partie A-antisymétrique maximale (pour l'inclusion). Alors $g \in A$.*

1. Montrer que le théorème de Bishop entraîne celui de Stone-Weierstrass dans le cas complexe :

Théorème (Stone-Weierstrass)**.** *Soit X un espace métrique compact, et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$ séparant les points, stable par conjugaison complexe, et telle qu'en tout point $x \in X$ il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq 0$. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$.*

Dans la suite, on démontre le théorème de Bishop. On considère l'ensemble

$$A^\perp := \left\{ \mu \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}),\ \int_X f d\mu = 0,\ \forall f \in A \right\},$$

où $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des mesures de Radon complexes sur X. On note également

$$K := \left\{ \mu \in A^\perp,\ \|\mu\| \leq 1 \right\}.$$

2. Montrer que K est convexe, qu'il est compact pour la topologie faible-$*$ sur $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$, *i.e.* $\sigma(\mathcal{M}(X, \mathbb{C}), \mathcal{C}^0(X, \mathbb{C}))$, et qu'on peut supposer que K n'est pas réduit à $\{0\}$.

3. Soit μ un point extrémal de K. On introduit E_μ le support de μ, *i.e.* le plus petit compact $E_\mu \subset X$ tel que $|\mu|(E_\mu) = \|\mu\|$. Supposons donnée une application $f \in A$, à valeurs réelles, et telle que $-1 < f(x) < 1$ sur E_μ. On considère alors les mesures $d\sigma := \frac{1}{2}(1+f)d\mu$ et $d\tau := \frac{1}{2}(1-f)d\mu$. Montrer que $\sigma/\|\sigma\|$ et $\tau/\|\tau\|$ appartiennent à K, et que μ est une combinaison convexe de ces deux mesures. En déduire f est constante, puis que E_μ est A-antisymétrique.

4. Soit g satisfaisant les hypothèses du théorème de Bishop. Déduire du théorème de Krein-Milman que pour tout $\mu \in K$, on a $\langle g, \mu \rangle = 0$. Conclure.

5. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques vérifiant $\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = 0$, pour tout entier $k < 0$. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}^0_{\mathrm{per}}$, qui sépare les points et contient 1. Ce résultat contredit-il le théorème de Stone-Weierstrass ?

⋆