Analyse fonctionnelle
TD n° 4

Topologies faible et faible $*$ (1)

Séance du 25 février 2019

Exercice 1. *Échauffement : trois exemples fondamentaux*

1. (Évanescence) Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $u_n(x) := \phi(x-n) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

2. (Concentration) Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $v_n(x) := \sqrt{n} \cdot \phi(nx) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

3. (Oscillations) Soit $w \in L^2([0, 2\pi])$ une fonction 2π-périodique non constante. Montrer que $w_n(x) := w(nx) \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ dans $L^2([0, 2\pi])$, mais que cette convergence n'est pas forte.

⋆

Exercice 2. *La topologie faible n'est pas métrisable*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

1. On suppose que E est métrisable pour la topologie faible. En rappelant pourquoi tout voisinage faible dans E contient une droite, montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n\| = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $x_n \rightharpoonup 0$.

2. Conclure à une contradiction grâce au théorème de Banach-Steinhaus.

On va maintenant démontrer le même résultat d'une autre manière.

3. (Lemme des noyaux) Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, ψ, des formes linéaires sur E telles que

$$\bigcap_{k=1}^{n} \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi.$$

Démontrer que ψ s'écrit comme une combinaison linéaire des φ_k.

4. On suppose que la topologie faible est métrisable. Montrer qu'il existe alors une famille dénombrable $F \subset E^*$, telle que toute forme linéaire continue sur E s'écrive comme une combinaison linéaire (finie) d'éléments de F. En déduire une contradiction.

⋆

Exercice 3. *Autour des théorèmes de Krein-Milman et de Banach-Alaoglu*

1. On veut montrer qu'il n'existe aucune isométrie entre $L^1([0,1])$ et le dual topologique d'un espace vectoriel normé.

   a) Montrer que la boule unité de $L^1([0,1])$ n'admet pas de point extrémal.

   b) Conclure.

2. Montrer que l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ tendant vers 0 à l'infini n'est pas isométrique au dual topologique d'un espace vectoriel normé.

3. On veut montrer qu'il n'existe aucune isométrie entre $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et le dual topologique d'un espace vectoriel normé.

a) Quels sont les points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$?

b) Conclure.

$\star$

Exercice 4. *Autour du lemme de Goldstine*

Soit X un espace de Banach. Pour tout $x \in X$, on dispose de l'évaluation $\varphi_x : \ell \in X^* \mapsto \ell(x) \in \mathbb{R}$. On définit ainsi une application

$$J : \begin{cases} X \longrightarrow X^{**} \\ x \longmapsto \varphi_x. \end{cases}$$

Pour un espace vectoriel normé E, on note B_E sa boule unité fermée.

1. Montrer que J induit une isométrie de X dans $J(X)$, et que $J(X)$ est fermé (fortement) dans X^{**}.

2. Si E est un espace vectoriel topologique, quelles sont les formes linéaires continues sur E^* pour la topologie faible $*$ $\sigma(E^*, E)$?

3. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, montrer que $J(B_X)$ est dense dans $B_{X^{**}}$ pour la topologie faible $*$ $\sigma(X^{**}, X^*)$.

$\star$

Exercice 5. *Propriété de Schur pour* $\ell^1(\mathbb{N})$

On veut démontrer le résultat suivant : dans $\ell^1(\mathbb{N})$, les suites convergentes sont les mêmes pour les topologies faible et forte.

1. On commence par un résultat général : soit E un espace de Banach séparable. Soit B sa boule unité fermée et B^* la boule unité de E^*. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense de B. Montrer que lorsque l'on pose, pour ℓ, $\ell' \in B^*$,

$$d(\ell, \ell') := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} |(\ell - \ell')(x_n)|,$$

on définit une distance sur B^*, dont la topologie est la topologie faible $*$ sur B^*, $\sigma(E^*, E)$.

Soit à présent $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^1(\mathbb{N})$ convergeant faiblement vers 0. Pour tout n, on note $u^n = (u^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, $u^n_k \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

3. Soit B^* la boule unité fermée de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, munie de la topologie faible $*$. Vérifier que cette topologie est bien engendrée par la distance

$$\tilde{d}(v, w) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{|v_j - w_j|}{2^j},$$

et que B^* est alors un espace métrique compact.

4. Soit $\varepsilon > 0$. On définit $F_n = \{v \in B^*;\ \forall m \geq n,\ |\langle v, u^m\rangle| \leq \varepsilon\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que F_n contienne un voisinage de 0. Conclure.

5. En combinant ce résultat avec celui de l'exercice 7 du TD3 (*Adhérence de la boule unité pour la topologie faible*), expliquer pourquoi l'application id : $(\ell^1(\mathbb{N}), \sigma(\ell^1(\mathbb{N}), \ell^1(\mathbb{N})^*)) \to (\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell^1})$ est séquentiellement continue, mais pas continue.

$\star$