Corrigé – TD 4
Intégration de fonctions mesurables

Exercice 0. Soit $\mathscr{C} = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, muni de la topologie de la convergence uniforme. On note $\mathcal{C}_1$ la tribu borélienne de $\mathscr{C}$ et $\mathcal{C}_2$ la plus petite tribu de $\mathscr{C}$ rendant les applications de "projection" $f \mapsto f(x)$ mesurables pour tout x. Deviner la question, et y répondre !

Corrigé : L'ensemble $\mathscr{C}$ est muni de la topologie de la convergence uniforme. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, l'application $f \in \mathscr{C} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ est continue et donc mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{C}_1$. On en déduit l'inclusion $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$. Montrons réciproquement que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$. Soit une fonction $f_0 \in \mathscr{C}$ fixée. Pour tout $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, l'application $f \in \mathscr{C} \mapsto |f(x) - f_0(x)|$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{C}_2$. Donc l'application $f \in \mathscr{C} \mapsto \sup_{x\in\mathbb{Q}} |f(x) - f_0(x)|$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{C}_2$ car c'est un sup dénombrable de fonctions mesurables. Or $\|f - f_0\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{Q}} |f(x) - f_0(x)|$. Ainsi la fonction $f \in \mathscr{C} \mapsto \|f - f_0\|_\infty$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{C}_2$ ce qui implique que toutes les boules ouvertes de $\mathscr{C}$ sont mesurables par rapport à $\mathcal{C}_2$. Rappelons que le théorème de Weierstrass implique que l'ensemble des (restrictions à $[0,1]$ des) applications polynomiales à coefficients rationnels est dense dans $\mathscr{C}$. L'espace $\mathscr{C}$ étant séparable, tous les ouverts de $\mathscr{C}$ sont donc mesurables par rapport à $\mathcal{C}_2$.

Exercice 1 (Mesure positive à densité)**.**
Soit $(E,\mathscr{E},\mu)$ un espace mesuré. Soit $f\colon E \to [0,\infty]$ une fonction $\mathscr{E}$-mesurable.

1. Pour tout $A \in \mathscr{E}$ on pose
$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu = \int_E \mathbf{1}_A f\,d\mu.$$
Vérifier que ν est une mesure positive sur $(E,\mathscr{E})$. On l'appellera *mesure de densité f par rapport à μ*, ce que l'on abrège en $\nu = f\mu$.

2. Si $g\colon E \to [0,\infty]$ est $\mathscr{E}$-mesurable, montrer que pour tout $A \in \mathscr{E}$, on a
$$\int_A g\,d\nu = \int_A gf\,d\mu.$$

Corrigé : Voir le polycopié de cours.

Exercice 2 (Petites questions)**.**
1) On définit sur un espace mesuré $(E,\mathscr{E},\mu)$ une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geq 0}$ et une fonction mesurable f telle que $f_n \to f$ μ-p.p. On suppose que $\sup_{n\geq 0} \int_E |f_n|\,d\mu < \infty$. Montrer que f est intégrable.

2) (*Inégalité de Markov*). Soit $f \in \mathscr{L}^1(E,\mathscr{E},\mu)$. Montrer que pour tout $A > 0$,
$$\mu(\{|f| \geq A\}) \leq \frac{1}{A}\int_E |f|d\mu.$$

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

Corrigé : 1) Il suffit d'utiliser le lemme de Fatou : comme $|f(x)| = \lim |f_n(x)|$ presque partout :

$$\int |f| d\mu = \int \liminf |f_n| d\mu \leq \liminf \Big(\int |f_n| \Big),$$

et cette dernière quantité est finie puisqu'elle est plus petite que $\sup_n \int |f_n| d\mu$.

2) Il suffit d'écrire:

$$\int_E |f| d\mu \geq \int_E |f| \mathbf{1}_{\{|f| \geq A\}} d\mu \geq \int_E A \mathbf{1}_{\{|f| \geq A\}} d\mu = A\mu(\{|f| \geq A\}).$$

Exercice 3 (Exemples et Contre-exemples)**.**

1. Soit (f_n) une suite de fonctions positives convergeant μ-p.p. vers f. Supposons que $\int f_n d\mu \to c < \infty$. Montrer que $\int f d\mu$ est définie et appartient à $[0, c]$ mais ne vaut pas nécessairement c.

2. Donner un exemple de fonctions positives $(f_n)_{n \geq 0}$ pour lesquelles
$$\limsup \int f_n(x) dx > \int \limsup f_n(x) dx.$$

3. Donner un exemple de fonctions positives $(f_n)_{n \geq 0}$ pour lesquelles
$$\limsup \int f_n(x) dx < \int \limsup f_n(x) dx.$$

4. Construire une suite de fonctions continues f_n sur $[0, 1]$, avec $0 \leq f_n \leq 1$, et telle que
$$\lim \int_0^1 f_n(x) dx = 0,$$
sans toutefois que la suite $(f_n(x))$ ne converge pour aucun x de $[0, 1]$.

5. Dans le théorème de convergence dominée, vérifier, en donnant des exemples et contre-exemples, que si l'on oublie une hypothèse la conclusion peut rester vraie, ou pas !

6. Reprendre la question précédente avec le théorème de convergence monotone.

Corrigé : Tout d'abord, voici une liste d'exemples utiles :

La bosse glissante : $f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$.

Le puits infini : $f_n = n\mathbf{1}_{[0,1/n]}$.

Le stroboscope infernal : $f_{n,k}(x) = \mathbf{1}_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]}$ pour $1 \leq k \leq n$, un plateau de largeur $1/n$ que l'on fait glisser sur le segment $[0, 1]$.

Pour les probabilistes : $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite iid de Bernoulli $1/2$.

1.–4. Choisir un contre-exemple parmi la liste ci-dessus.

5. Si l'on oublie la condition de domination : si l'on prend $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[n,n+1]}$, la conclusion reste vraie (autre exemple : $f_n(x) = -n$ si $-1/n < x < 0$, $f_n(x) = n$ si $0 < x < 1/n$ et 0 sinon) ; mais si l'on prend la bosse glissante la conclusion est mise en défaut. Si l'on oublie la convergence presque partout : voir question 4. pour un exemple où la conclusion demeure, mais si l'on prend $f_n(x) = \sin(n)$ sur $[0,1]$, la conclusion est mise en défaut.

6. Si l'on oublie la croissance : si l'on prend $f_n = \mathbf{1}_{\{n\}}$, la conclusion reste vraie, mais si l'on prend le puits infini, la conclusion est mise en défaut. Si l'on oublie la positivité : si l'on prend $f_n = -\mathbf{1}_{\{n\}}$, la conclusion reste vraie, mais si l'on prend $f_n(x) = -\frac{1}{x}\mathbf{1}_{]0,1/n[}(x)$, la conclusion est mise en défaut.

Exercice 4 (Uniforme continuité de l'intégrale)**.**
Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathscr{E}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable.

1) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int |f|\mathbf{1}_{\{|f|>n\}} d\mu = 0$.

2) Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathscr{E},\ \ \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$.

3) Si $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue λ, que peut-on dire de la fonction $F\colon u \mapsto \int_{[0,u]} f d\lambda$?

Corrigé :

1) La fonction f étant intégrable, elle est finie μ-p.p. et donc $\mathbf{1}_{\{|f|>n\}} \to 0$ μ-p.p. quand $n \to \infty$. Ainsi, $|f|\mathbf{1}_{\{|f|>n\}} \to 0$ μ-p.p. quand $n \to \infty$ et d'après le théorème de convergence dominée,
$$\int_E |f|\mathbf{1}_{\{|f|>n\}}\, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\int_E |f|\mathbf{1}_{\{|f|>n_\varepsilon\}}\, d\mu \le \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $\delta_\varepsilon = \varepsilon/(2n_\varepsilon)$. Alors, pour $A \in \mathscr{E}$ de mesure $\mu(A) < \delta_\varepsilon$,
$$\int_A |f| d\mu = \int_{A\cap\{|f|>n_\varepsilon\}} |f| d\mu + \int_{A\cap\{|f|\le n_\varepsilon\}} |f| d\mu \le \int_E |f|\mathbf{1}_{\{|f|>n_\varepsilon\}} d\mu + n_\varepsilon \mu(A) < \varepsilon.$$

3) Montrons que F est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ tel que
$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\lambda < \varepsilon.$$
En particulier, si $0 \le y - x < \delta$ alors $|F(y) - F(x)| = |\int_{]x,y]} f d\lambda| \le \int_{]x,y]} |f| d\lambda < \varepsilon$.

Exercice 5.

1. Soit $(f_n)_{n\ge0}$ une suite de fonctions $(E, \mathscr{E}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ intégrables. Montrer que
$$\sum_{n\ge0} \int_E |f_n| d\mu < \infty \Longrightarrow \sum_{n\ge0} \left(\int_E f_n d\mu\right) = \int_E \left(\sum_{n\ge0} f_n\right) d\mu.$$

2. Calculer les intégrales
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx, \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}dx.$$

Corrigé :

1. D'après le théorème de convergence monotone, la fonction $\sum_{n\geq 0}|f_n|$ est intégrable. Cela implique que la fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ existe et est intégrable. De plus, pour tout $N\in\mathbb{N}$,
$$\left|\sum_{n=0}^N f_n\right| \leq \sum_{n\geq 0}|f_n| \text{ et } \sum_{n=0}^N f_n \xrightarrow[N\to\infty]{\text{p.p.}} \sum_{n\geq 0} f_n.$$
D'après le théorème de convergence dominée, on a donc
$$\int_E \left(\sum_{n=0}^N f_n\right) d\mu \quad \xrightarrow[N\to\infty]{} \quad \int_E\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right) d\mu.$$
Par ailleurs, pour tout $N\geq 0$,
$$\int_E \left(\sum_{n=0}^N f_n\right) d\mu = \sum_{n=0}^N \int_E f_n\, d\mu.$$
Et $\int_E f_n d\mu$ est le terme général d'une série absolument convergente par hypothèse. En passant à la limite quand $N\to+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient le résultat.

2. Pour tout $x\in]0,1[$, on a
$$\frac{\ln(x)}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \ln(x).$$
Posons pour tout $n\geq 0$, $f_n : x\in]0,1[\mapsto x^n\ln(x)$. Alors, par une intégration par parties, on obtient,
$$\int_0^1 |f_n(x)|\, dx = -\int_0^1 x^n \ln(x)\, dx = \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\, dx = \frac{1}{(n+1)^2}.$$
Donc $\sum_{n\geq 0}\int_0^1 |f_n(x)|dx < +\infty$. On peut donc appliquer la question 1. et l'on trouve,
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\, dx = \int_0^1 \left(\sum_{n\geq 0} x^n \ln(x)\right) dx = \sum_{n\geq 0}\int_0^1 x^n\ln(x)\, dx = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$
Autre possibilité : Écrire $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\, dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\, dx$ et développer $\ln(1-x)$ en série entière.

Pour tout $x>0$, on a
$$\frac{\sin(ax)}{e^x-1} = e^{-x}\frac{\sin(ax)}{1-e^{-x}} = \sum_{n\geq 0} e^{-(n+1)x}\sin(ax).$$

Posons pour tout $n \geq 0$, $f_n \colon x \in]0, +\infty[\mapsto e^{-(n+1)x} \sin(ax)$. Alors, pour tout $x > 0$, $|f_n| \leq |a| x e^{-(n+1)x}$, et

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^\infty |f_n(x)| dx \leq \sum_{n \geq 0} \int_0^\infty |a| x e^{-(n+1)x} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{|a|}{(n+1)^2} < \infty.$$

Ainsi, d'après la question 1.,

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} \, dx = \sum_{n \geq 0} \int_0^\infty f_n(x) \, dx.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_n(x) \, dx = \int_0^\infty \left(e^{-(n+1)x} \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} \right) dx &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{n+1-ia} - \frac{1}{n+1+ia} \right) \\ &= \frac{a}{(n+1)^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} \, dx = \sum_{n \geq 1} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

Exercice 6 (Convergence en mesure)**.**
Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soient $(f_n)_{n \geq 0}$ et f des fonctions mesurables de $(E, \mathscr{E})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la suite (f_n) converge vers f en mesure si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu(|f - f_n| > \varepsilon) \longrightarrow 0.$$

1. Montrer que si $\int_E |f - f_n| d\mu \to 0$, alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.

2. Montrer que si $f_n \to f$ μ-p.p., alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.

3. En utilisant le lemme de Borel–Cantelli, montrer que si $f_n \to f$ en mesure, alors on peut extraire une sous-suite de (f_n) qui converge μ-p.p. vers f.

4. *Un théorème de convergence dominée plus fort.* On suppose que $f_n \to f$ en mesure et qu'il existe une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f_n| \leq g$ μ-p.p. pour tout $n \geq 1$.

   (a) Montrer que $|f| \leq g$ μ-p.p.

   (b) En déduire à l'aide de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale que

   $$\int_E |f_n - f| d\mu \to 0.$$

5. *L'espace* $\mathbf{L}^0(E, \mu)$. On note $\mathbf{L}^0(E, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables quotienté par la relation d'égalité μ-p.p.

(a) Montrer que l'on peut définir une distance sur $\mathbf{L}^0(E,\mu)$ par

$$\delta(f,g) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon \mu(|f-g| > \varepsilon) \leq \varepsilon\},$$

et que celle-ci métrise la convergence en mesure.

(b) Montrer que $(\mathbf{L}^0(E,\mu),\delta)$ est complet.

(c) Montrer qu'il n'existe pas de distance sur $\mathbf{L}^0(E,\mu)$ qui métrise la convergence μ-p.p.

Corrigé :

1. On suppose que $\int_E |f_n - f|\, d\mu \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Markov,

$$\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_E |f_n - f|\, d\mu,$$

ce qui implique que $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$. Réciproquement, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ par

$$f_n = n\mathbf{1}_{[0,1/n]}.$$

Alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en mesure vers 0. En effet pour tout $n \geq 1$, $\lambda(f_n > 0) = 1/n$. En revanche, pour tout $n \geq 1$, $\int_{[0,1]} f_n(x)\, dx = 1$.

2. On suppose que $f_n \to f$ μ-p.p. Soit $\varepsilon > 0$. Alors,

$$\mu\Big(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n}\{|f_m - f| > \varepsilon\}\Big) = 0.$$

Or, la suite $(\cup_{m\geq n}\{|f_m - f| > \varepsilon\})_{n\geq 0}$ est décroissante pour l'inclusion et μ est une mesure finie, donc on a,

$$\lim_{n\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{m\geq n}\{|f_m - f| > \varepsilon\}\Big) = 0.$$

En particulier, $\lim_{n\to\infty}\mu\left(\{|f_n - f| > \varepsilon\}\right) = 0$.

Une autre possibilité est d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $\mathbf{1}_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}}$.

Réciproquement, considérons le stroboscope infernal : la suite de fonctions $(f_{n,k})_{n\geq 1, 1\leq k\leq n}$ définie sur $[0,1]$ par

$$f_{n,k} = \mathbf{1}_{[(k-1)/n,k/n]}.$$

Alors $(f_{n,k})_{n\geq 1, 1\leq k\leq n}$ converge en mesure vers 0, car $\lambda(f_{n,k} > 0) = 1/n$ pour tout $n \geq 1$ et tout $1 \leq k \leq n$. En revanche $\limsup f_{n,k} = \mathbf{1}_{[0,1]}$, donc la convergence n'a pas lieu μ-p.p.

3. On peut construire une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que pour tout $k \geq 1$,

$$\mu\Big(|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\Big) \leq 2^{-k}.$$

Alors, d'après le lemme de Borel–Cantelli, pour μ-presque tout x, il existe $k_0(x)$ tel que pour tout $k \geq k_0(x)$, $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq 1/k$. Cela implique que $f_{n_k} \to f$ μ-p.p. quand $k \to \infty$.

4. Première méthode : par l'absurde. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que pour tout $k \geq 0$,

$$\int_E |f_{n_k} - f| \, d\mu \geq \varepsilon. \tag{1}$$

Or $f_{n_k} \to f$ en mesure quand $k \to \infty$ donc d'après la question 3., on peut extraire une sous-suite $(f_{n_{k_j}})_{j\geq 0}$ de (f_{n_k}) telle que $f_{n_{k_j}} \to f$ μ-p.p. Or $|f_{n_{k_j}}| \leq g$ pour tout $j \geq 0$. Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_E \left| f_{n_{k_j}} - f \right| d\mu \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cela contredit l'inégalité (1).

Deuxième méthode : Comme suggéré dans l'énoncé.

(a) Vérifions tout d'abord que $|f| \leq g$ μ-p.p. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mu(|f| > g + \varepsilon) \leq \mu(|f| > |f_n| + \varepsilon) \leq \mu(|f - f_n| > \varepsilon).$$

Donc, $\mu(|f| > g + \varepsilon) = 0$. Ainsi, μ-p.p., pour tout $n \geq 1$, $|f| \leq g + 1/n$ et donc $|f| \leq g$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned}\int_E |f_n - f| \, d\mu &= \int_{\{|f_n - f| \leq \varepsilon\}} |f_n - f| \, d\mu + \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |f_n - f| \, d\mu \\ &\leq \varepsilon\mu(E) + 2\int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |g| \, d\mu\end{aligned}$$

La fonction g étant intégrable, on a d'après la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale,

$$2\int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |g| \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $\limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu \leq \varepsilon\mu(E)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\int_E |f_n - f| \, d\mu \to 0$.

5.(a) Montrons que δ est une distance sur $\mathbf{L}^0(E, \mu)$. Soient $f, g \in \mathbf{L}^0(E, \mu)$. Il est évident que $\delta(f, f) = 0$ et $\delta(f, g) = \delta(g, f)$. Supposons $\delta(f, g) = 0$. Alors pour tout $n \geq 1$, $\mu(|f - g| > 1/n) \leq 1/n$ et la suite $(\{|f - g| > 1/n\})_{n\geq 1}$ est croissante pour l'inclusion, donc on a

$$\mu(f \neq g) = \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} \{|f - g| > 1/n\}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(|f - g| > 1/n) = 0,$$

i.e. $f = g$ μ-p.p. Soient maintenant $f, g, h \in \mathbf{L}^0(E, \mu)$. Posons $a = \delta(f, g)$ et $b = \delta(g, h)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}\mu(|f - h| > a + b + 2\varepsilon) &\leq \mu(|f - g| + |g - h| > a + b + 2\varepsilon) \\ &\leq \mu(|f - g| > a + \varepsilon) + \mu(|g - h| > b + \varepsilon) \\ &\leq a + b + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Cela implique $\delta(f,h) \leq \delta(f,g)+\delta(g,h)$. Vérifions que δ métrise la convergence en mesure. Soient $f \in \mathbf{L}^0(E,\mu)$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbf{L}^0(E,\mu)$. On suppose tout d'abord que $f_n \to f$ en mesure. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, $\delta(f_n, f) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ ce qui montre que $\delta(f_n, f) \to 0$. Supposons maintenant que $\delta(f_n, f) \to 0$. Soit $\eta > 0$ fixé. Pour tout $\varepsilon \in]0,\eta]$, il existe n_0 tel que $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$,

$$\mu(|f_n - f| > \eta) \leq \mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $f_n \to f$ en mesure.

5.(b) On peut construire une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que $\mu(|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k}) \leq 2^{-k}$ pour tout $k \geq 1$. Notons

$$A_k = \left\{ |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k} \right\}.$$

Alors $\sum_{k\geq 1} \mu(A_k) < \infty$. Donc, d'après le lemme de Borel–Cantelli, $\mu(\limsup_k A_k) = 0$. Ainsi, la série

$$\sum_{k\geq 1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

converge pour μ-presque tout x. Donc la suite $(f_{n_k}(x))_{k\geq 1}$ converge pour μ-presque tout x. On note f sa limite μ-p.p. (on pose $f = 0$ sur l'ensemble de mesure nulle où f n'est pas définie, noter que f est bien définie μ-p.p.). Alors d'après la question 2., $f_{n_k} \to f$ en mesure. Ainsi $\delta(f_{n_k}, f) \to 0$ et donc $\delta(f_n, f) \to 0$.

5.(c) Supposons qu'il existe une distance d sur $\mathbf{L}^0(E,\mu)$ qui métrise la convergence μ-p.p. D'après la question 2., on peut construire une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $(E,\mathscr{E},\mu)$ qui converge en mesure vers 0 mais pas μ-p.p. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que $d(f_{n_k}, 0) \geq \varepsilon$ pour tout $k \geq 0$. Or $f_{n_k} \to 0$ en mesure. Donc, d'après la question 3., on peut construire une suite extraite $(f_{n_{k_j}})_{j\geq 0}$ qui converge μ-p.p. vers 0. Cela contredit l'inégalité $d(f_{n_{k_j}}, 0) \geq \varepsilon$ pour tout $j \geq 0$.

Exercice 7 (Quand est-ce que la convergence p.p. implique la convergence dans $\mathscr{L}^1$?)**.**
Soit $(E,\mathscr{E},\mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) < \infty$. Une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ est dite **uniformément intégrable** si

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geq c\}} |f_i| d\mu = 0. \tag{2}$$

a) Montrer que toute famille finie de $\mathscr{L}^1(E,\mathscr{E},\mu)$ (noté $\mathscr{L}^1(\mu)$ dans la suite) est uniformément intégrable.

b) Montrer que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(i) $\sup_{i\in I} \int |f_i| d\mu < \infty$

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0, \forall\, A \in \mathscr{E}, \quad \mu(A) < \eta \Longrightarrow \forall\, i \in I, \int_A |f_i| d\mu < \varepsilon.$

c) Montrer que si deux familles $(f_i)_{i\in I}$ et $(g_i)_{i\in I}$ sont uniformément intégrables, alors il en est de même pour la famille $(f_i + g_i)_{i\in I}$.

d) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions qui converge μ-p.p. vers une fonction f. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable si, et seulement si, $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ et

$$\int_E |f_n - f| \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Corrigé :

a) Si I est fini, il suffit de montrer que $\lim_{c\to\infty} \int_{\{|f_i|\geq c\}} |f_i| d\mu = 0$ pour $i \in I$ fixé. Ceci découle du théorème de convergence dominée, car

$$\int_{\{|f_i|\geq c\}} |f_i| d\mu = \int_E |f_i| \mathbf{1}_{\{|f_i|\geq c\}} d\mu,$$

et $|f_i|\mathbf{1}_{\{|f_i|\geq c\}}$ converge μ-p.p. vers 0 lorsque $c \to \infty$ en étant majoré par $|f_i|$, qui est intégrable.

b) Montrons d'abord l'implication. On remarque que pour $i \in I$ et $c \geq 0$,

$$\int_E |f_i| d\mu \leq c\mu(E) + \int_{\{|f_i|\geq c\}} |f_i| d\mu.$$

D'après (2), il existe $C > 0$ tel que $\sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geq C\}} |f_i| d\mu < \infty$. On a alors

$$\sup_{i\in I} \int |f_i| d\mu \leq C\mu(E) + \sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geq C\}} |f_i| d\mu < \infty,$$

ce qui prouve (i).

Pour (ii), on imite la preuve de l'uniforme continuité de l'intégrale: on fixe $\epsilon > 0$ et on choisit $C > 0$ tel que $\sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geq C\}} |f_i| d\mu < \epsilon/2$. Si $\mu(A) \leq \epsilon/(2C)$, on a pour tout $i \in I$:

$$\int_A |f_i| d\mu \leq \int_{A\cap\{|f_i|\leq C\}} |f_i| d\mu + \int_{\{|f_i|\geq C\}} |f_i| d\mu \leq C\mu(A) + \int_{\{|f_i|\geq C\}} |f_i| d\mu \leq \epsilon.$$

Montrons maintenant la réciproque. Notons $\gamma = \sup_{i\in I} \int |f_i| d\mu < \infty$. D'après l'inégalité de Markov, pour $i \in I$ et $c \geq 0$ on a $\mu(\{|f_i| \geq c\}) \leq \gamma/c$. Fixons $\epsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ tel que la condition (ii) soit vérifiée. Pour $c \geq \gamma/\eta$ on a alors , $\mu(\{|f_i| \geq c\}) \leq \eta$ pour tout $i \in I$, ce qui implique

$$\sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geq c\}} |f_i| d\mu \leq \epsilon$$

grâce à (ii). Le résultat s'ensuit.

c) C'est une conséquence facile de la question b) en utilisant l'inégalité triangulaire.

d) Montrons d'abord l'implication. D'après b), $\sup_n \int |f_n| d\mu < \infty$. En utilisant le lemme de Fatou, on voit aisément que $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Ensuite, soit $\epsilon > 0$. On écrit pour $c \geq 0$

$$\int_E |f_n - f| d\mu \leq \int_E \min(|f_n - f|, c) d\mu + \int_{\{|f_n - f| \geq c\}} |f_n - f| d\mu.$$

D'après a), f est uniformément intégrable, et donc d'après c) la suite $(f_n - f)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable. Il existe donc $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\int_{\{|f_n - f| \geq C\}} |f_n - f| d\mu \leq \epsilon.$$

On a donc

$$\int_E |f_n - f| d\mu \leq \int_E \min(|f_n - f|, C) d\mu + \epsilon.$$

Mais le premier terme de la quantité de droite tend vers 0 d'après le théorème de convergence dominée. On a donc $\int_E |f_n - f| d\mu \leq 2\epsilon$ pour n suffisamment grand, ce qui prouve l'implication désirée.

Montrons finalement la réciproque. La condition $\int_E |f_n - f| \, d\mu \to 0$ garantit que la suite $(f_n - f)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable. Nous avons déjà vu que f est uniformément intégrable. Il s'ensuit que la suite $(f_n - f + f)_{n \geq 1} = (f_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable, ce qui conclut l'exercice.