PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 4
MARTINGALES - TEMPS D'ARRÊT

Exercice 1 (Une trivialité)**.**
Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On note pour $n \geq 0$, $\mathcal{G}_n = \sigma(M_0, \ldots, M_n)$ la filtration *canonique* associée à la martingale (M_n). Montrer que (M_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{G}_n)$.

Exercice 2 (À la pêche aux martingales)**.**
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Pour $n \geq 0$, on note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ($\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$) et on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $(S_n^2 - n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
3. Montrer que $(S_n^3 - 3nS_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
4. Devinez un polynôme $P(x, y)$ de degré 4 en x et de degré 2 en y tel que $(P(S_n, n))_{n\geq 0}$ soit une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
5. Plus généralement montrer que si P est un polynôme de deux variables alors $(P(S_n, n))_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si pour tous $s, n \in \mathbb{Z}$ on a
$$P(s + 1, n + 1) + P(s - 1, n + 1) = 2P(s, n).$$
6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver un $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $(\exp(\lambda S_n - \xi n))_{n\geq 0}$ soit une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 3.
Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(T \leq n + N \mid \mathcal{F}_n) > \varepsilon, \quad p.s..$$

Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < \infty$.

Exercice 4.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dont la loi est déterminée par

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \ \text{ et } \ \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$$

avec $p \in]0, 1[\setminus\{1/2\}$. Soient K et N deux entiers tels que $0 \leq K \leq N$. On pose $S_0 = K$, $S_n = K + X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$, $T_0 = \inf\{n \geq 0, S_n = 0\}$, $T_N = \inf\{n \geq 0, S_n = N\}$, $T = T_0 \wedge T_N$ et pour tout $n \geq 0$,

$$M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}.$$

1. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

2. En considérant la martingale arrêtée $(M_{n\wedge T})_{n\geq 0}$, calculer $\mathbb{P}(T = T_0)$ et $\mathbb{P}(T = T_N)$.

Exercice 5 (Deux transformations de martingales.)**.**
On se place sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe, et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté (i.e. X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout n), tel que $\mathbb{E}[\phi(X_n)] < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si (X_n) est une martingale, alors $(\phi(X_n))$ est une sous-martingale. Montrer que si (X_n) est une sous-martingale et si ϕ est croissante, alors $(\phi(X_n))$ est une sous-martingale.

2. On dit qu'un processus $(H_n)_{n\geq 1}$ est prévisible si, pour tout $n \geq 1$, H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable (*Attention, parfois prévisible recouvre en plus la notion de bornitude, pas ici*). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté et $(H_n)_{n\geq 1}$ une famille prévisible et bornée. On pose $(H \bullet X)_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,
$$(H \bullet X)_n \;=\; H_1(X_1 - X_0) + H_2(X_2 - X_1) + ... + H_n(X_n - X_{n-1})\,.$$
Montrer que si (X_n) est une martingale, alors $((H\bullet X)_n)$ est aussi une martingale. Montrer que si (X_n) est une surmartingale (respectivement sous-martingale), et si $H_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, $((H \bullet X)_n)$ est une surmartingale (respectivement sous-martingale).

Exercice 6.
Trouver un processus $(M_n)_{n\geq 0}$ avec $E[|M_n|] < \infty$ pour tout n et tel que $E[M_{n+1} \mid M_n] = M_n$ sans que (M_n) soit une martingale.

Exercice 7 (Une réciproque au théorème d'arrêt)**.**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus sur $(\omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$, intégrable et adapté. Montrer que si pour tout temps d'arrêt borné τ on a $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$, alors X_n est une martingale.

Exercice 8 (Une autre version du théorème d'arrêt.)**.**
Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$ et T un temps d'arrêt vérifiant
$$\mathbb{P}(T < +\infty) = 1\;,\;\; \mathbb{E}(|X_T|) < \infty \text{ et } \mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{\{T>n\}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. Montrer que $\mathbb{E}(|X_T|\mathbb{1}_{\{T>n\}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

2. Montrer que $\mathbb{E}(|X_{T\wedge n} - X_T|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

3. En déduire que $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.