TD4 : Produits semi-directs, théorèmes de Sylow, et application à la classification des groupes finis de petits cardinaux

Exercice 1.

Donner un exemple de suite exacte courte qui n'est pas un produit semi-direct.

Exercice 2.

Soient H et N des groupes et soient ϕ et $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ des morphismes. On veut trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que $N \rtimes_\phi H$ et $N \rtimes_\psi H$ soient isomorphes.

1. S'il existe un automorphisme α de H tel que $\psi = \phi \circ \alpha$, montrer que l'on a la conclusion attendue.
2. S'il existe un automorphisme u de N tel que
$$\forall h \in H \qquad \phi(h) = u\psi(h)u^{-1},$$
montrer que la conclusion attendue vaut encore.
3. Si H est cyclique et que ϕ et $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ sont tels que $\phi(H) = \psi(H)$, montrer que $N \rtimes_\phi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.

Exercice 3.

Soient $p < q$ des nombres premiers. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes de cardinal pq.

Exercice 4.

Montrer que tout groupe d'ordre 255 est cyclique. Généraliser aux groupes de cardinal $p_1p_2p_3$, où p_1, p_2, p_3 sont des nombres premiers distincts tels que p_i ne divise pas $p_j - 1$ pour $i \neq j$.

Exercice 5.

1. Montrer qu'un groupe d'ordre 8 est isomorphe à l'un des groupes suivants :
$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3,\ D_4,\ \mathbf{H}_8.$$
Justifier que $\mathbf{H}_8$ n'est pas un produit semi-direct et que les cinq groupes cités sont deux-à-deux non isomorphes.
2. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ possède un unique 2-Sylow que l'on identifiera.
3. Donner la liste des classes d'isomorphisme de groupes finis de cardinal ≤ 15.

Exercice 6.

Soient $p \neq q$ deux nombres premiers. Classifier les groupes d'ordre p^2q.

Exercice 7.

Soit p un nombre premier impair. On se propose de décrire les groupes finis de cardinal p^3.

1. Déterminer les p-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
2. Soient ϕ et ψ des morphismes non triviaux de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. En notant pour tout entier k, ϕ_k le morphisme défini par $\phi_k(x) = \phi(kx)$, montrer qu'il existe un entier k et une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ tels que $\psi = P\phi_kP^{-1}$.
3. En déduire qu'il existe, à isomorphisme près, un unique produit semi-direct non trivial $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
4. Montrer que le centre de ce dernier groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
5. Soit G un groupe d'ordre p^3 non cyclique, contenant un élément x d'ordre p^2. Monter que $\langle x \rangle$ est distingué dans G et que G est un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
6. Décrire les classes d'isomorphisme de groupes de cardinal p^3 : on raisonnera par exemple suivant l'ordre maximal d'un élément du groupe.

Exercice 8.

Soit $G = N \rtimes H$ et soit K un sous-groupe de G contenant N. Montrer que l'on a $K = N \rtimes (K \cap H)$.

Exercice 9.

1. Montrer que l'on peut écrire $\mathfrak{S}_n$ comme un produit semi-direct naturel.
2. Montrer que l'on peut écrire $\mathrm{GL}_n(k)$ comme un produit semi-direct naturel (k est un corps).
3. Ces produits semi-directs sont-ils directs ?

Exercice 10.

Démontrer que tout groupe fini de cardinal 180 admet un sous-groupe distingué non trivial. On pourra pour cela supposer qu'il n'y a pas de tel sous-groupe, puis compter les p-Sylow pour $p = 3$ ou $p = 5$.